

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
РЯЗАНСКАЯ ГОСУДАРСТВЕННАЯ РАДИОТЕХНИЧЕСКАЯ  
АКАДЕМИЯ

**М.Е. Ильин**

**АППРОКСИМАЦИЯ И  
ИНТЕРПОЛЯЦИЯ. МЕТОДЫ И  
ПРИЛОЖЕНИЯ**

Учебное пособие

Удалено: 2003

Рязань [2010](#)



## ВВЕДЕНИЕ

В математике существует значительный круг задач, в процессе решения которых требуется восстановить либо саму непрерывную функцию  $f(x)$ , либо некоторое выражение от этой функции (ее значение в произвольной точке  $f(x_0)$ , производные  $f'(x), f''(x), \dots$  или их значения  $f'(x_0), f''(x_0), \dots$ , опреде-

ленный интеграл  $\int_a^b f(x)dx$  или первообразную  $\int_a^x f(t)dt$  и прочее), если известны

точные или приближенные значения этой функции на некотором дискретном множестве точек (сетке). Это дискретное множество значений функции, например таблица или массив, может быть результатом какого-либо расчета либо итогом некоторого наблюдения. Задача интерполяции<sup>1</sup> состоит в построении такой функции, чтобы в узлах сетки эта интерполирующая функция принимала заданные значения из таблицы, а в других точках - по возможности приемлемые значения.

Если ординаты функции в таблице вычислены точно, то можно надеяться, что сформулированные задачи имеют разумные решения. Этот круг задач носит название интерполирование функции. С ними тесно связаны процедуры интегрирования и дифференцирования табличных функций, вычисление значений табличных функций вне сетки и т.д. Если же, с другой стороны, эти точки получены в результате сравнительно грубых измерений, то неправомерно требовать от интерполирующей функции точного следования заданным значениям из таблицы. Этот круг задач носит название аппроксимации<sup>2</sup> функции (интерполяции с ошибками). Методы приближенного интегрирования и дифференцирования, а также сглаживания табличных функций, вычисление приближенных значений табличных функций вне сетки и т. д., интенсивно используют аппарат аппроксимации. Термин аппроксимации применяется и тогда, когда намеренно производится поиск не самой функции, а более простого ее аналога. Допуская отклонения интерполяционной функции от измеренных величин таблицы, можно провести анализ допущенных ошибок или даже подправить измерения.

Цели интерполяции разнообразны. Но почти всегда в ее основе лежит желание иметь быстрый и простой алгоритм вычисления значений функции в

---

<sup>1</sup> Интерполяция - приближенное или точное нахождение какой-либо величины по известным отдельным значениям этой же или других величин, связанных с ней. В первоначальном понимании - восстановление функции (точное или приближенное) по известным ее значениям или значениям ее производных в заданных точках.

<sup>2</sup> От латинского *aproximo* - приближаюсь. Замена одних математических объектов другими, в том или ином смысле близкими к исходным. Аппроксимация позволяет исследовать числовые характеристики и качественные свойства объекта, сводя задачу к изучению более простых или более удобных объектов (например, таких, характеристики которых легко вычисляются или свойства которых уже известны).

точках, не входящих в таблицу. Компактная таблица данных и простой алгоритм интерполирования могут заменить очень большую таблицу значений функции.

Очень важно для задачи интерполирования определение того, как должна вести себя функция между заданными точками. Принципиально точки таблицы могут быть интерполированы множеством значений различных функций. Следовательно, необходим некоторый критерий выбора. Обычно такие критерии формулируются в терминах гладкости интерполирующей функции или простоты вычисления. Например, функция должна быть дважды дифференцируемой и модуль ее второй производной должен быть достаточно малым либо интерполирующая функция принадлежит классу многочленов наименьшего порядка.

Многие интерполирующие функции порождаются линейными комбинациями некоторых элементарных функций. Линейные комбинации одночленов приводят к алгебраическим полиномам или многочленам, тригонометрических функций - к тригонометрическим полиномам и т.д.

## 1. ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ

В этом разделе мы остановимся на основных классических методах интерполирования функции и рассмотрим прикладные задачи, в которых используется интерполирование. Исторически наиболее важным классом интерполирующих функций является кольцо алгебраических полиномов или многочленов. Многочлены имеют очевидное достоинство - их значения легко вычислять. Легко также складывать, умножать, дифференцировать и интегрировать. Кроме этого, существует еще одно свойство многочленов: если  $c$  - постоянная величина, а  $P_n(x)$  - многочлен  $n$ -го порядка, то многочленами будут  $cP_n(x)$  и  $P_n(x+c)$  тех же порядков. Классов функций с указанными свойствами существует достаточно много, тем не менее не каждый из них имеет удовлетворительные интерполяционные качества. Для многочленов существует теорема, гарантирующая существование многочлена, отклоняющегося от непрерывной функции не более чем на заданную величину.

*Теорема 1.1 (теорема Вейерштрасса). Если функция  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a;b]$ , то существует последовательность многочленов  $\{P_n(x)\}$ , где  $n$  - порядок многочлена, равномерно на  $[a;b]$  сходящаяся к функции  $f(x)$ , т.е. для произвольного  $\epsilon > 0$  найдется такой многочлен  $P_n(x)$  порядка  $n$ , зависящего, быть может, от  $\epsilon$ , что выполняется неравенство  $|f(x) - P_n(x)| < \epsilon$  сразу для всех  $x$  отрезка  $[a;b]$ .*

Иными словами, непрерывную на отрезке  $[a;b]$  функцию можно равномерно на этом отрезке приблизить многочленом с любой наперед заданной точностью  $\epsilon$ .

### 1.1. Постановка основной задачи интерполирования

Пусть на конечном отрезке  $[a;b]$  заданы  $n+1$  точки:  $x_0, x_1, \dots, x_n$  (сетка), которые называются узлами интерполяции, и значения функции  $f(x)$  в них

$$f(x_0) = y_0, f(x_1) = y_1, \dots, f(x_n) = y_n. \quad (1.1)$$

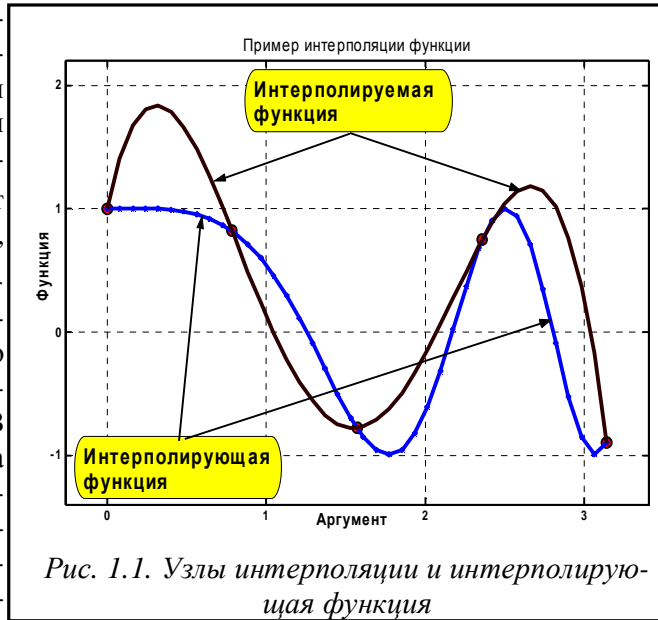
Требуется построить функцию  $\Phi(x)$  (интерполирующая функция) из известного класса (должен быть определен дополнительно) и принимающую в узлах сетки те же значения, что и функция  $f(x)$ :

$$\Phi(x_k) = f(x_k) = y_k, \quad k = \overline{0, n}. \quad (1.2)$$

Геометрическая иллюстрация этой задачи показана на рис. 1.1: искомая интерполирующая функция  $y = \Phi(x)$  (непрерывная линия на рисунке) проходит через точки  $M_k(x_k, y_k)$ ,  $k = \overline{0, n}$ , отмеченные кружками на координатной плоскости. Видно, сколь значительно отличается исходная функция от интерполирующей. В этой постановке (1.2) задача интерполирования некорректна: имеется неединственное решение в силу произвольности выбора интерполирующей функции из предложенного класса функций. Однако эта задача становится корректной, если вместо произвольной функции  $\Phi(x)$  искать многочлен  $P_n(x)$  порядка не выше  $n$ , удовлетворяющий условиям:

$$P_n(x_k) = y_k, \quad k = \overline{0, n}. \quad (1.3)$$

Полученную интерполирующую функцию  $y = P_n(x)$  называют интерполяционным полиномом и обычно используют при вычислении значения данной функции  $y = f(x)$  или ее производных для значений аргумента, отличных от узлов интерполирования. Если интерполяционный полином строится сразу для всех узлов сетки, то его называют глобальным. После выбора класса многочленов в качестве интерполирующей функции остается свобода выбора базиса в пространстве таких многочленов. Наиболее очевидный базис из одночленов  $1, x, x^2, \dots, x^n$  приводит к решению системы линейных алгебраических уравнений с матрицей Вандермонда, которая плохо обусловлена<sup>1</sup>. Более удовлетвори-



<sup>1</sup> Это является следствием почти линейной зависимости таких функций. На отрезке  $[0;1]$  степенные одночлены положительны и принимают на концах отрезка одни и те же значения, равные 0 и 1. Значит, их скалярное произведение заведомо не может быть равным или достаточно близким к нулю.

тельный способ построения полинома состоит в использовании базиса так называемых лагранжевых полиномов.

### 1.2. Интерполяционная формула Лагранжа

По-видимому, интерполяционная формула Лагранжа является одной из самых популярных. Обозначим через  $L_n(x)$  интерполяционный многочлен (полином) Лагранжа для функции  $y(x)$  и рассмотрим метод его построения. Предварительно заметим, что сетка узлов интерполяции для построения интерполяционной формулы Лагранжа не обязательно должна быть равномерной, но не должна содержать кратных узлов (повторяющихся значений аргумента).

Пусть  $p_i(x), i = \overline{0, n}$ , - система многочленов, удовлетворяющая условиям:  $p_i(x_j) = d_{ij}, i, j = \overline{0, n}$ , где  $d_{ij}$  - символ Кронекера<sup>1</sup>. Такие многочлены называются лагранжевыми полиномами или базисом Лагранжа. Последнее означает, что многочлен  $p_i(x)$  принимает нулевое значение во всех узлах сетки, за исключением  $x_i$ , в котором он равен единице. Полином Лагранжа имеет вид линейной комбинации в базисе Лагранжа  $L_n(x) = \sum_{i=0}^n a_i p_i(x)$ . С учетом свойств базиса Ла-

гранжа имеем  $L_n(x_k) = \sum_{i=0}^n a_i p_i(x_k) = a_k, k = \overline{0, n}$ . Поскольку в узлах сетки должны выполняться равенства  $L_n(x_k) = y(x_k) = y_k, k = \overline{0, n}$ , то полином Лагранжа, с учетом свойств базиса, принимает вид  $L_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i p_i(x)$ .

Найдем явный вид базиса Лагранжа. Искомый базисный полином системы имеет вид  $p_i(x) = C_i \prod_{\substack{m=0 \\ m \neq i}}^n (x - x_m)$ , где  $C_i$  - коэффициент, определяемый усло-

вием  $p_i(x_i) = 1$ . Отсюда  $C_i \prod_{\substack{m=0 \\ m \neq i}}^n (x_i - x_m) = 1$  и базисный полином

$$p_i(x) = \left( \prod_{\substack{m=0 \\ m \neq i}}^n (x - x_m) \right) \left( \prod_{\substack{m=0 \\ m \neq i}}^n (x_i - x_m) \right)^{-1} = \prod_{\substack{m=0 \\ m \neq i}}^n \left( \frac{x - x_m}{x_i - x_m} \right), i = \overline{0, n}. \quad (1.4)$$

Эта формула показывает, что базис Лагранжа определяется только сеткой, но никак не интерполируемой функцией. С учетом сказанного, искомый интерполяционный многочлен Лагранжа принимает вид

---

<sup>1</sup> Символ Кронекера определяется равенствами  $d_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j. \end{cases}$

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i p_i(x) = \sum_{i=0}^n y_i \prod_{\substack{m=0 \\ m \neq i}}^n \left( \frac{x - x_m}{x_i - x_m} \right). \quad (1.5)$$

Поскольку  $p_i(x)$  - многочлен переменной  $x$  порядка не выше  $n$ , то и полином Лагранжа  $L_n(x)$  как конечная линейная комбинация многочленов порядка не выше  $n$  также будет многочленом порядка не выше  $n$ . Формула (1.5) называется интерполяционной формулой Лагранжа, а многочлен, определяемый этой формулой, - интерполяционным полиномом Лагранжа.

**Теорема 1.2. Полином Лагранжа определен однозначно.**

*Доказательство. Предположим противное. Пусть  $\tilde{L}_n(x)$  - полином, отличный от  $L_n(x)$ , порядка не выше  $n$  и такой, что  $\tilde{L}_n(x_k) = y_k$ ,  $k = \overline{0, n}$ . Тогда полином  $Q_n(x) = \tilde{L}_n(x) - L_n(x)$ , порядок которого также не выше  $n$ , обращается в нуль в  $n+1$  различных точках сетки  $x_k$ ,  $k = \overline{0, n}$ . То есть  $Q_n(x) \equiv 0$ . Следовательно, выполняется тождество  $\tilde{L}_n(x) \equiv L_n(x)$ . Теорема доказана.  $\blacktriangle$*

Представим полином Лагранжа  $L_n(x)$  в несколько ином виде. Пусть

$$p_{n+1}(x) = \prod_{k=0}^n (x - x_k), p'_{n+1}(x) = \sum_{j=0}^n \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^n (x - x_k), p'_{n+1}(x_i) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n (x_i - x_k). \quad \text{Тогда}$$

$$L_n(x) = p_{n+1}(x) \sum_{k=0}^n \frac{y_k}{p'_{n+1}(x_k)(x - x_k)}. \quad (1.6)$$

Отметим особенности интерполяционной формулы Лагранжа.

- Значения интерполируемой функции  $y_i$  входят в интерполяционный многочлен Лагранжа явно.
- Для вычисления значения полинома  $L_n(x^*)$  требуется  $2n-1$  “быстрых” операций типа “сложение”,  $2n$  “медленных” операций типа “умножение” или типа “деление”.
- Если в интерполяционную сетку добавляется хотя бы один узел, то интерполяционный многочлен Лагранжа приходится строить заново с самого начала.

### 1.3. Оценка погрешности интерполяционной формулы Лагранжа

В настоящем разделе исследуется вопрос о поведении функции  $R_n(x) = f(x) - L_n(x)$ ,  $x \in [a; b]$  - погрешности интерполяционной формулы (1.5) для функции  $f(x)$  на отрезке  $[a; b]$ . Дополнительно предположим, что функция  $f(x)$   $n+1$  раз дифференцируема на  $[a; b]$ . Введем функцию  $j(x) = f(x) - L_n(x) - A p_{n+1}(x)$ , где  $A$  - некоторый коэффициент, величина которого будет определена далее. В узлах сетки выполняется  $j(x_k) = 0$ ,  $k = \overline{0, n}$ . Кроме этого, в силу свойств функции  $f(x)$  и полинома  $L_n(x)$  справедливо  $j(x) \in C^{n+1}[a; b]$ . Выберем коэффициент  $A$  так, чтобы в некоторой точке

$\bar{x} \in [a; b]$ , не совпадающей ни с одним узлом сетки, выполнялось  $j(\bar{x}) = 0$ . Для этого достаточно положить, чтобы коэффициент  $A = \frac{f(\bar{x}) - L_n(\bar{x})}{p_{n+1}(\bar{x})}$ . Таким обра-

зом, функция  $j(x)$  имеет  $n+2$  различных корня и обращается в нуль на концах каждого из отрезков  $[x_0; x_1], [x_1; x_2], \dots, [x_k; \bar{x}], [\bar{x}; x_{k+1}], \dots, [x_{n-1}; x_n]$ . Применив последовательно  $n+1$  раз теорему Ролля к функции  $j(x)$ , получим, что  $j'(x)$  имеет не менее  $n+1$  корня на отрезке  $[a; b]$ ,  $j''(x)$  - не менее  $n$  корней на отрезке  $[a; b]$  и т.д. И, наконец, производная  $j^{(n+1)}(x)$  имеет хотя бы один корень на отрезке  $[a; b]$ :  $j^{(n+1)}(x) = 0$ . Кроме этого,  $L_n^{(n+1)}(x) \equiv 0$ ,  $p_{n+1}^{(n+1)}(x) = (n+1)!$  и  $j^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x) - A(n+1)!$ . Полагая  $x = \bar{x}$ , получим  $f^{(n+1)}(\bar{x}) - A(n+1)! = 0$  или  $A = \frac{f^{(n+1)}(\bar{x})}{(n+1)!}$ . Сравнивая это выражение с предыдущим значением коэффи-

циента  $A$ , получаем равенство  $\frac{f(\bar{x}) - L_n(\bar{x})}{p_{n+1}(\bar{x})} = \frac{f^{(n+1)}(\bar{x})}{(n+1)!}$  или окончательную фор-

мулу  $f(\bar{x}) - L_n(\bar{x}) = \frac{f^{(n+1)}(\bar{x})}{(n+1)!} p_{n+1}(\bar{x})$ . Так как точка  $\bar{x}$  выбрана произвольно, то формула погрешности интерполяции функции полиномом Лагранжа принимает вид

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x)}{(n+1)!} p_{n+1}(x), \quad x \in (a; b). \quad (1.7)$$

Анализ формулы (1.7) показывает, что сама погрешность  $R_n(x)$  интерполяционной формулы Лагранжа, с точностью до некоторого числового множителя, - произведение двух сомножителей, один из которых  $f^{(n+1)}(x)$  зависит от свойств дифференцируемой функции  $f(x)$ , и часто эта функция даже неизвестна, а величина другого  $p_{n+1}(x)$  определяется исключительно выбором узлов интерполирования. При случайном выборе расположения узлов сетки  $x_k$ ,  $k = \overline{0, n}$ , величина  $\sup_{x \in [a; b]} |R_{n+1}(x)|$  может быть достаточно большой. Следовательно,

уменьшить ошибку интерполирования можно:

- уменьшая длину отрезка интерполирования  $[a; b]$ ;
- выбирая рациональное расположение узлов интерполирования на отрезке  $[a; b]$ , в том числе увеличивая количество узлов сетки;
- применяя интерполяционную формулу для заведомо гладких “хороших” функций, у которых  $(n+1)$ -я производная достаточно мала;
- выбирая новую переменную.

Привлекая термины линейного пространства, можно утверждать, что многочлен Лагранжа  $L_n(x)$  - “проекция” функции  $y(x)$  на линейное простран-



ство многочленов порядка не выше  $n$ , а ошибка интерполирования  $R_n(x)$  - ортогональное дополнение. Многочлены  $p_i(x)$ ,  $i = \overline{0, n}$  (1.7) составляют базис, не обязательно ортогональный, этого линейного пространства размерностью  $n + 1$ .

*Пример 1.1. Построить интерполяционный многочлен Лагранжа для функции  $\cos x$  на отрезке  $[0; p]$ , взяв в качестве узлов интерполяционной сетки точки  $0, \frac{p}{4}, \frac{p}{2}, \frac{3p}{4}, p$ .*

*Решение. Интерполяционная сетка содержит пять узлов, и полином Лагранжа - многочлен четвертого порядка. Вычислим значение заданной функции в узлах сетки<sup>1</sup>. Имеем  $y_0 = \cos 0 = 1$ ,  $y_1 = \cos \frac{p}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.7071$ ,  $y_2 = \cos \frac{p}{2} = 0$ ,*

*$y_3 = \cos \frac{3p}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} = -0.7071$  и  $y_4 = \cos p = -1$ . По формулам (1.4) вычисляем*

$$p_0(x) = 0.11 \left( x - \frac{p}{4} \right) \left( x - \frac{p}{2} \right) \left( x - \frac{3p}{4} \right) (x - p), \quad p_1(x) = -0.44x \left( x - \frac{p}{2} \right) \left( x - \frac{3p}{4} \right) (x - p),$$

$$p_2(x) = 0.66x \left( x - \frac{p}{4} \right) \left( x - \frac{3p}{4} \right) (x - p), \quad p_3(x) = -0.44x \left( x - \frac{p}{4} \right) \left( x - \frac{p}{2} \right) (x - p),$$

$$p_4(x) = 0.11x \left( x - \frac{p}{4} \right) \left( x - \frac{p}{2} \right) \left( x - \frac{3p}{4} \right)$$

*Отсюда полином Лагранжа имеет следующий вид*

$$\begin{aligned} L_4(x) = & 0.11 \left( x - \frac{p}{4} \right) \left( x - \frac{p}{2} \right) \left( x - \frac{3p}{4} \right) (x - p) - 0.44x \left( x - \frac{p}{2} \right) \left( x - \frac{3p}{4} \right) \times \\ & \times (x - p) + 0.66x \left( x - \frac{p}{4} \right) \left( x - \frac{3p}{4} \right) (x - p) - 0.44x \left( x - \frac{p}{4} \right) \left( x - \frac{p}{2} \right) (x - p) + \\ & + 0.11x \left( x - \frac{p}{4} \right) \left( x - \frac{p}{2} \right) \left( x - \frac{3p}{4} \right) \end{aligned}$$

*Исследуем точность полученной интерполяционной формулы Лагранжа.*

*Сравним значения функции  $\cos x$  и полинома Лагранжа  $L_4(x)$  в точке  $\frac{p}{6}$ :*

*$\cos \frac{p}{6} = 0.866$ ,  $L_4\left(\frac{p}{6}\right) = 0.871$ . Поскольку для модуля производной функции*

*$|\cos x|^{(5)} \leq 1$ , то справедлива мажорантная оценка модуля ошибки интерполя-*

*ции функции  $\cos x$  на  $[0; p]$ :  $|R_4(x)| \leq \frac{1}{5!} \max_{x \in [0, p]} \left| x \left( x - \frac{p}{4} \right) \left( x - \frac{p}{2} \right) \left( x - \frac{3p}{4} \right) (x - p) \right|$ .*

<sup>1</sup> Здесь и далее для всех вычисленных числовых величин приведены их округленные значения.

Оценивая каждый сомножитель под знаком модуля, получаем, что

$$|R_4(x)| \leq \frac{1.032}{5!} \approx 0.009. \text{ Это хорошо согласуется с результатами вычислений.}$$

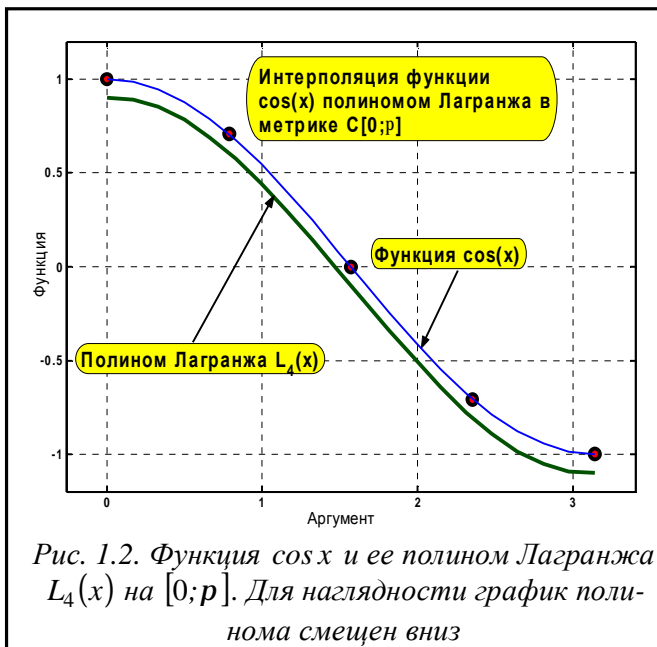


Рис. 1.2. Функция  $\cos x$  и ее полином Лагранжа  $L_4(x)$  на  $[0; \pi]$ . Для наглядности график полинома смещен вниз

На рис. 1.2 показаны графики функции  $\cos x$  (линия, отмеченная маркерами) и интерполяционного многочлена Лагранжа  $L_4(x)$  (линия без маркеров, для наглядности сдвинута вниз). В данном случае интерполяционный полином и исходная функция совпали достаточно хорошо. Применение интерполяции оправдано.

Глобальные многочлены, построенные для интерполирования сразу на всей сетке, часто не позволяют удовлетворительно решить задачу. Одной из причин может быть различие

свойств интерполируемой функции и ее интерполирующего полинома. В задачах приближения функции на всем отрезке  $[a; b]$  алгебраическая интерполяция высокого порядка применяется сравнительно редко. Алгебраический интерполяционный процесс не является сходящимся в классе непрерывных на отрезке  $[a; b]$  функций. Этот факт объясняется теоремой.

**Теорема 1.3 (теорема Фабера).** Для произвольного интерполяционного массива найдутся непрерывная функция  $g(x)$  и точка  $c$  отрезка  $[a; b]$ , такие, что интерполяционный многочлен  $P_n(x)$  для этой функции не сходится в точке  $c$  при увеличении порядка интерполирующего многочлена  $P_n(x)$  к значению функции  $g(x)$  в этой точке.

Следующий пример иллюстрирует тот факт, что даже для бесконечно дифференцируемых функций интерполяция Лагранжа приводит к большим ошибкам.

**Пример 1.2 (пример Рунге).** Для функции  $y = \frac{1}{1+25x^2}$  на отрезке  $[-3; 3]$

построить интерполяционный многочлен на равномерной сетке с 5 узлами.

**Решение.** Узлы интерполяционной формулы расположим в точках:  $-3, -1.5, 0, 1.5, 3$ . При таком выборе узлов полином Лагранжа имеет вид

$$L_4(x) = 8.23045 \cdot 10^{-3}(x+1.5)x(x-1.5)(x-3) - 0.03292(x+3)x(x-1.5) \times \\ \times (x-3) + 0.04938(x+3)(x+1.5)(x-1.5)(x-3) - 0.03292(x+3)(x+1.5)x \times \\ \times (x-3) + 8.23045 \cdot 10^{-3}(x+3)(x+1.5)x(x-1.5).$$

Сравнивая значения функции и полинома в точке  $x = 2$ :  $y(2) = 9.91 \cdot 10^{-3}$ ,

$L_4(2) = -0.41$ , видим, что эти значения значительно разнятся. Увеличение количества узлов интерполяции не делает ошибку  $R_n(x) = y(x) - L_n(x)$  бесконечно малой функцией величины  $n$  на отрезке  $[-3; 3]$ .

Интуитивно это объясняется довольно просто:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y^{(k)}(x) = 0, \quad k \in \mathbb{Z}^+, \quad \text{но}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} P_n^{(k)}(x) \neq 0, \quad k \in \mathbb{Z}^+. \quad \text{Для}$$

разложения функции  $\frac{1}{1+25x^2}$

выбран неудачный базис. На

рис. 1.3 показаны графики самой функции Рунге (жирная линия) и ее интерполяционного полинома Лагранжа (тонкая линия).

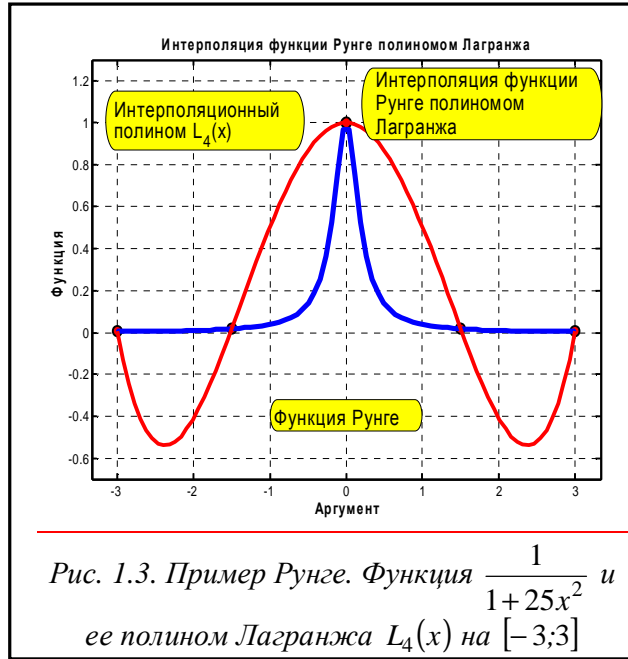


Рис. 1.3. Пример Рунге. Функция  $\frac{1}{1+25x^2}$  и ее полином Лагранжа  $L_4(x)$  на  $[-3; 3]$

### 1.4. Разделенные разности. Интерполяционная формула Ньютона

Вид многочлена Лагранжа достаточно элегантен для теоретических исследований, однако на практике часто используют интерполяционные формулы Ньютона, к построению некоторых из которых мы и приступаем.

#### 1.4.1. Конечные разности

Обозначим через  $\Delta x = h$  фиксированную положительную величину приращения аргумента (шаг).

*Определение 1.1.* Первой конечной разностью функции  $y = f(x)$  называется выражение

$$\Delta y = \Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x). \tag{1.8}$$

Аналогично определяются конечные разности высших порядков.

*Определение 1.2.* Конечной разностью порядка  $n$  называется первая конечная разность от конечной разности порядка  $n - 1$

$$\Delta^n y = \Delta(\Delta^{n-1} y), \quad n = 2, 3, \dots \tag{1.9}$$

**Теорема 1.4.** Если  $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$  - алгебраический многочлен порядка  $n$ , то его конечная разность  $n$ -го порядка постоянна и равна  $\Delta^n P_n(x) = n! a_0 h^n$ .

*Доказательство.* Вычислим конечную разность первого порядка от многочлена

$$\begin{aligned} \Delta P_n(x) = P_n(x+h) - P_n(x) &= a_0[(x+h)^n - x^n] + a_1[(x+h)^{n-1} - x^{n-1}] + \dots \\ &\dots + a_{n-2}[(x+h)^2 - x^2] + \dots + a_{n-1}[(x+h) - x]. \end{aligned}$$

Раскрыв с помощью бинома Ньютона выражения внутри квадратных скобок, получим, что эта разность представляет собой многочлен  $(n-1)$ -го порядка

$$\Delta P_n(x) = b_0(h)x^{n-1} + b_1(h)x^{n-2} + \dots + b_{n-2}(h)x + b_{n-1}(h),$$

старший коэффициент которого, как нетрудно убедиться непосредственным подсчетом, равен  $b_0(h) = nh a_0$ . Рассуждая подобным образом, получаем, что  $\Delta^2 P_n(x)$  - многочлен порядка  $n-2$  с коэффициентом, при старшей степени, равным  $c_0(h) = (n-1)hb_0 = (n-1)nh^2 a_0$ . Последовательно переходя к конечным разностям более высокого порядка, получаем искомое равенство. Теорема доказана. ▲

Символ  $\Delta$  можно рассматривать как оператор, ставящий в соответствие функции  $y = f(x)$  функцию  $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ . Непосредственно проверяются следующие его свойства:  $\Delta(u \pm v) = \Delta u \pm \Delta v$ ,  $\Delta(Cu) = C\Delta u$ ,  $C = const$ ,  $\Delta^m(\Delta^n u) = \Delta^{m+n}u$ ,  $\Delta^0 u = u$ . Последнее равенство полагают по определению.

Из определения конечной разности имеем  $f(x + \Delta x) = f(x) + \Delta f(x)$ . Рассматривая это выражение как некоторую символическую запись, получаем:  $f(x + \Delta x) = (1 + \Delta)f(x)$ . Применяя это соотношение  $n$  раз, будем иметь

$$f(x + n\Delta x) = (1 + \Delta)^n f(x). \quad (1.10)$$

Формула бинома Ньютона приводит к окончательной формуле

$$f(x + n\Delta x) = \sum_{m=0}^n C_n^m \Delta^m f(x). \quad (1.11)$$

Рассмотрим тождество  $\Delta = (1 + \Delta) - 1$ . Тогда выполняется

$$\begin{aligned} \Delta^n f(x) &= [(1 + \Delta) - 1]^n f(x) = (1 + \Delta)^n f(x) - C_n^1 (1 + \Delta)^{n-1} f(x) + \\ &+ C_n^2 (1 + \Delta)^{n-2} f(x) + \dots + (-1)^n f(x) \end{aligned}$$

или с использованием предыдущей формулы получаем

$$\Delta^n f(x) = f(x + n\Delta x) - C_n^1 f(x + (n-1)\Delta x) + C_n^2 f(x + (n-2)\Delta x) - \dots + (-1)^n f(x).$$

Последняя формула дает выражение конечной разности  $n$ -го порядка функции  $f(x)$  через последовательные значения этой функции.

**Теорема 1.5 (обобщенная теорема Лагранжа).** Пусть функция  $f(x)$  имеет непрерывную производную  $n$ -го порядка на интервале  $(x; x + n\Delta x)$ . Тогда найдется такое число  $q : 0 < q < 1$ , что будет справедлива формула

$$\Delta^n f(x) = (\Delta x)^n f^{(n)}(x + qn\Delta x). \quad (1.12)$$

Из последней формулы следует равенство  $f^{(n)}(x + qn\Delta x) = \frac{\Delta^n f(x)}{(\Delta x)^n}$ . Переходя к пределу при  $\Delta x \rightarrow 0$  и предполагая, что производная  $f^{(n)}(x)$  непрерывна, получаем  $f^{(n)}(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta^n f(x)}{(\Delta x)^n}$  или  $f^{(n)}(x) \approx \frac{\Delta^n f(x)}{(\Delta x)^n}$ .

#### 1.4.2. Обобщенная степень

**Определение 1.3.** Обобщенной  $n$ -й степенью числа  $x$  называется произведение  $n$  сомножителей, первый из которых равен  $x$ , а каждый следующий на постоянное число  $h$  меньше предыдущего:

$$x^{[n]} = x(x-h)(x-2h)\dots[x-(n-1)h], \quad n \in \mathbb{N}, \quad x^{[0]} \equiv 1.$$

Если  $h = 0$ , то обобщенная степень совпадает с обычной степенью  $x^{[n]} = x^n$ .

Вычислим конечные разности обобщенных степеней. Первая разность

$$\begin{aligned} \Delta x^{[n]} &= (x+h)^{[n]} - x^{[n]} = (x+h)x(x-h)\dots[x-(n-2)h] - x(x-h)\dots \\ &\dots[x-(n-2)h][x-(n-1)h] = x(x-h)\dots \end{aligned}$$

$$\dots[x-(n-2)h][(x+h) - [x-(n-1)h]] = x(x-h)\dots[x-(n-2)h]nh = nhx^{[n-1]}.$$

Для второй разности получаем

$$\Delta^2 x^{[n]} = \Delta(\Delta x^{[n]}) = \Delta(nhx^{[n-1]}) = nh\Delta(x^{[n-1]}) = nh(n-1)hx^{[n-2]} = n(n-1)h^2x^{[n-2]}.$$

Последовательно вычисляя разности более высокого порядка, получаем

$$\Delta^k x^{[n]} = n(n-1)\dots[n-(k-1)]h^k x^{[n-k]}, \quad k = \overline{1, n}, \quad \Delta^k x^{[n]} = 0, \quad k > n.$$

Для обобщенной степени определена формула конечного суммирования. Пусть  $x_0, x_1, \dots, x_n, \dots$  – равномерная сетка с шагом  $h$  (аналог формулы Ньютона – Лейбница):

$$\begin{aligned} S_N &= \sum_{k=0}^{N-1} x_k^{[n]} = \left| x^{[n]} = \frac{\Delta x^{[n+1]}}{h(n+1)} \right| = \frac{1}{h(n+1)} \sum_{k=0}^{N-1} \Delta x_k^{[n+1]} = \\ &= \frac{1}{h(n+1)} \left[ (\Delta x_1^{[n+1]} - \Delta x_0^{[n+1]}) + (\Delta x_2^{[n+1]} - \Delta x_1^{[n+1]}) + \dots + (\Delta x_N^{[n+1]} - \Delta x_{N-1}^{[n+1]}) \right] = \\ &= \frac{1}{h(n+1)} (\Delta x_N^{[n+1]} - \Delta x_0^{[n+1]}). \end{aligned}$$

#### 1.4.3. Разделенные разности

Разделенные разности являются обобщением конечных разностей на случай неравномерной сетки.

*Определение 1.4.* Если функция  $y = f(x)$  задана на неравномерной сетке  $x_i, i = \overline{0, n}$ , то выражения  $\Delta y_i = [x_i, x_{i+1}]y = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}, i = \overline{0, n-1}$  называют разделенными разностями первого порядка<sup>1</sup>.

Аналогично вводят понятие разделенных разностей второго и последующих порядков:

$$[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]y = \frac{[x_{i+1}, x_{i+2}]y - [x_i, x_{i+1}]y}{x_{i+2} - x_i}, i = \overline{0, n-2}. \quad (1.13)$$

Вообще говоря, разделенные разности  $n$ -го порядка получается из разделенных разностей  $(n-1)$ -го порядка с помощью рекуррентных формул:

$$[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+n}]y = \frac{[x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{i+n}]y - [x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+n-1}]y}{x_{i+n} - x_i}. \quad (1.14)$$

Таким образом, с точностью до некоторого числового множителя разделенная разность  $n$ -го порядка - разностная производная того же порядка. Отметим следующие свойства разделенных разностей.

Разделенная разность функции  $y(x)$  в точках  $x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}$  - коэффициент при старшей степени полинома Ньютона  $k$ -го порядка, построенного на этих точках.

Для кратных узлов интерполирования разделенная разность равна

$$[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}]y = \begin{cases} \frac{1}{k!} y^{(k)}(x_i), x_i = x_{i+1} = \dots = x_{i+k}, \\ \frac{[x_{i+1}, \dots, x_{r-1}, x_{r+1}, \dots, x_{i+n}]y - [x_i, \dots, x_{s-1}, x_{s+1}, \dots, x_{i+n-1}]y}{x_s - x_r}. \end{cases}$$

Разделенная разность - симметрическая функция своих аргументов  $x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}$  и зависит только от их значений, но не от порядка, в котором они следуют. Кроме этого выполняется  $[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+n}]y = \sum_{k=0}^n \frac{y_k}{p'_{n+1}(x_k)}$ .

Разделенная разность - линейная функция относительно функций, к которым она применяется:

$$[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}](ay + bz) = a[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}]y + b[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}]z.$$

В дальнейшем, если не возникнет необходимости, знак функции в обозначении разделенной разности будет опускаться.

*Пример 1.3.* Для функции  $y = \frac{1}{1+25x^2}$  построить разделенные разности на равномерной сетке  $-3, -1.5, 0, 1.5, 3$ .

<sup>1</sup> Для этого выражения, существует и другое наименование: разностная производная вперед (восходящая производная).

Таблица 1.1. Разделенные разности функции Рунге

Аргумент	Функция	Разделенные разности			
		первая	вторая	третья	четвертая
-3.0	$4.4248 \cdot 10^{-3}$	$8.695 \cdot 10^{-3}$	0.2154	-0.1449	0.0483
-1.5	0.0175	0.655	-0.4367	0.1449	0
0.0	1	-0.655	0.2154	0	0
1.5	0.0175	$-8.695 \cdot 10^{-3}$	0	0	0
3.0	$4.4248 \cdot 10^{-3}$	0	0	0	0

Решение. Разделение разности удобно записывать в виде таблицы (см. табл. 1.1), в которой первый столбец - значения аргумента - узлы сетки, второй - значения функции в узлах сетки, третий - первые разделенные разности, отнесенные к соответствующему узлу сетки, и т.д. В каждом последующем столбце будет содержаться на одну разделенную разность меньше.

В табл. 1.1 приведены первые четыре разделенные разности функции Рунге. Все последующие, как нетрудно догадаться, будут тождественно равны нулю.

Пусть  $y = P_n(x)$  - полином  $n$ -го порядка. Тогда его первая разделенная разность  $[x, x_0]P_n(x) = \frac{P_n(x_0) - P_n(x)}{x_0 - x} = \frac{P_n(x) - P_n(x_0)}{x - x_0} = P_{n-1}(x, x_0)$  - полином  $(n-1)$ -го порядка. Покажем это непосредственными вычислениями:

$$\begin{aligned} \frac{P_n(x) - P_n(x_0)}{x - x_0} &= \frac{a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n - (a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \dots + a_nx_0^n)}{x - x_0} = \\ &= \frac{a_1(x - x_0) + a_2(x^2 - x_0^2) + \dots + a_n(x^n - x_0^n)}{(x - x_0)} = a_1 + a_2(x + x_0) + \\ &+ a_3(x^2 + xx_0 + x^2) + \dots + a_n(x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \dots + x_0^n). \end{aligned}$$

Отсюда справедливо следующее утверждение.

**Теорема 1.6.** Если  $P_n(x)$  - полином  $n$ -го порядка, то его разделенная разность  $(n+1)$ -го порядка тождественно равна нулю.

#### 1.4.4. Интерполяционный полином Ньютона

Рассмотрим теперь многочлен Лагранжа для некоторой функции  $f(x)$ . Обозначим  $L_n(x, x_0), L_n(x, x_0, x_1), \dots, L_n(x, x_0, x_1, \dots, x_n)$  - последовательно разделенные разности многочлена Лагранжа

$$\begin{aligned} L_n(x, x_0, x_1, \dots, x_n) &= 0, \quad \frac{L_n(x) - L_n(x_0)}{x - x_0} = L_n(x, x_0), \\ L_n(x) &= L_n(x_0) + L_n(x, x_0)(x - x_0), \quad L_n(x) = L_n(x_0) + [x, x_0](x - x_0), \\ \frac{L_n(x, x_0, \dots, x_{m-1}) - L_n(x_0, x_1, \dots, x_m)}{x - x_m} &= L_n(x, x_0, x_1, \dots, x_m), \\ L_n(x, x_0, x_1, \dots, x_{m-1}) &= L_n(x_0, x_1, \dots, x_m) + L_n(x, x_0, x_1, \dots, x_m)(x - x_m). \end{aligned}$$

Переходя от разделенных разностей низших порядков к разделенным разностям более высоких порядков, получаем

$$\begin{aligned} L_n(x) &= L_n(x_0) + L_n(x, x_0)(x - x_0) = L_n(x_0) + L_n(x_0, x_1)(x - x_0) + \\ &+ L_n(x, x_0, x_1)(x - x_0)(x - x_1) = \dots = L_n(x_0) + L_n(x_0, x_1)(x - x_0) + \\ &+ L_n(x_0, x_1, x_2)(x - x_0)(x - x_1) + \dots + L_n(x_0, x_1, \dots, x_n)(x - x_0)(x - x_1) \dots \\ &\dots(x - x_{n-1}) + L_n(x, x_0, x_1, \dots, x_n)(x - x_0)(x - x_1) \dots(x - x_n). \end{aligned}$$

Учтем, что последнее слагаемое равно нулю, в силу теоремы 1.2. Разделенные разности для многочлена Лагранжа в интерполяционных узлах совпадают с разделенными разностями заданной функции. Отсюда получаем искомую интерполяционную формулу Ньютона для неравномерной сетки:

$$\begin{aligned} N_n(x) &= y_0 + (x - x_0)[x_0, x_1]y + (x - x_0)(x - x_1)[x_0, x_1, x_2]y + \dots + \\ &+ (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})[x_0, x_1, \dots, x_n]y. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Здесь символом  $N_n(x)$  обозначен интерполяционный полином Ньютона, который, конечно, совпадает с интерполяционным многочленом Лагранжа, поскольку порядки многочленов равны, а значения в узлах сетки совпадают. Следовательно, и точность интерполяции определяется тем же выражением, что и для многочлена Лагранжа. Приведем представление этой погрешности через разделенные разности. Очевидно, выполняется соотношение:

$$\begin{aligned} y(x) &= y(x_0) + y'(x_0 + \Theta(x_1 - x_0))(x - x_0) = y(x_0) + \frac{y(x) - y(x_0)}{x - x_0}(x - x_0) = \\ &= y(x_0) + (x - x_0)[x_0, x]y = N_0(x) + (x - x_0)[x_0, x]y, 0 < \Theta < 1, \end{aligned}$$

т.е. погрешность интерполяции (второе слагаемое) представляет собой следующее слагаемое представления Ньютона:

$$y(x) = N_n(x) + R_n(x), \quad R_n(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)[x_0, x_1, \dots, x_n, x]y.$$

Заметим, что если разделенные разности построены предварительно, то для вычисления значения интерполяционного полинома Ньютона  $N_n(x)$  потребуется  $2n$  операций типа “сложение” и  $n$  операций типа “умножение”, если применять схему Горнера.

*Пример 1.4.* Для функции примера 1.3 построить интерполяционный многочлен Ньютона и найти значения функции и его интерполяционного многочлена в точке  $x = 2$ .

*Решение.* Воспользуемся разделенными разностями табл. 1.1. Нам необходимы разности, стоящие в первой строке каждого столбца этой таблицы. Подставляя их в формулу (1.15), получаем искомый полином Ньютона

$$\begin{aligned} N_4(x) &= 4.4248 \cdot 10^{-3} + 8.695 \cdot 10^{-3}(x + 3) + 0.12154(x + 3)(x + 1.5) - \\ &- 0.1449(x + 3)(x + 1.5)x + 0.0483(x + 3)(x + 1.5)x(x - 1.5). \end{aligned}$$

Значения функции и полинома при  $x = 2$  равны  $y(2) = 0.2$  и  $N_4(2) = -0.4086$ .

Еще раз отметим, что на одной и той же сетке интерполяционные многочлены Лагранжа и Ньютона совпадают. “Удобство” интерполяционной форму-



лы Ньютона становится очевидным, если построение интерполяционного многочлена выполняется по мере пополнения узлов интерполяции. При этом, как было уже сказано ранее, многочлен Лагранжа строится заново полностью. В это же время в полиноме Ньютона появляется только одно новое слагаемое.

#### 1.4.5. Интерполирующий многочлен на равномерной сетке

Выведем частный вид интерполяционного полинома Ньютона для случая равноотстоящих узлов. Найдем разделенные разности в полиноме Ньютона:

$$[x_i, x_{i+1}]y = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} = \frac{\Delta y_i}{h},$$

$$[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]y = \frac{[x_{i+1}, x_{i+2}]y - [x_i, x_{i+1}]y}{x_{i+2} - x_i} = \frac{\Delta y_{i+1} - \Delta y_i}{h \cdot 2h} = \frac{\Delta^2 y_i}{2! h^2}.$$

Последовательно продолжая этот процесс, получаем, что  $n$ -я разделенная разность определяется по формуле:

$$[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+n}]y = \frac{[x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{i+n}]y - [x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+n-1}]y}{x_{i+n} - x_i} =$$

$$= \frac{\Delta^{n-1} y_{i+1} - \Delta^{n-1} y_i}{(n-h)! h^{n-1} h} = \frac{\Delta^n y_i}{n! h^n}. \quad (1.16)$$

Сравнивая выражения для разделенных разностей с коэффициентом полинома Ньютона, получаем выражение для интерполяционного полинома Ньютона (первая интерполяционная формула Ньютона) для равноотстоящих узлов:

$$N_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{\Delta^k y_0}{k! h^k} (x - x_0)^{[k]} = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1! h} (x - x_0)^{[1]} +$$

$$+ \frac{\Delta^2 y_0}{2! h^2} (x - x_0)^{[2]} + \dots + \frac{\Delta^n y_0}{n! h^n} (x - x_0)^{[n]}. \quad (1.17)$$

При выполнении предельного перехода  $h \rightarrow 0$  формула (1.17) принимает вид многочлена Тейлора  $n$ -го порядка.

#### 1.5. Другие формулы многочленной интерполяции. Число обусловленности

До сих пор рассматривались нами только две формы многочленно-полиномиальной интерполяции: форма Лагранжа и форма Ньютона. Из других форм широко используется разложение по ортогональным многочленам. Такие разложения имеют вид:

$$y = \sum_{k=0}^n a_k P_k(x), \quad x \in X, \quad (1.18)$$

где  $P_k(x)$ ,  $k = \overline{0, n}$ , - последовательность многочленов, удовлетворяющая так называемому трехчленному рекуррентному соотношению:  $P_{-1}(x) = 0$ ,  $P_0(x) = 1$ ,  $P_{i+1}(x) = A_i(x - B_i)P_i(x) - C_i P_{i-1}(x)$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots$ , для некоторых коэффициентов

$A_i \neq 0, B_i, C_i$ . Заметим, что интерполяционный многочлен Ньютона, хотя не основан на использовании ортогональных многочленов, удовлетворяет этому соотношению при  $A_i = 1, B_i = x_{i+1}, C_i = 0, i = 1, 2, \dots$ . Коэффициенты разложения  $\{a_i\}$  в (1.18), подлежащие определению, очевидно, зависят от выбора последовательности многочленов. Простой, но очень эффективный базис  $P_k(x), k = \overline{0, n}$ , обеспечивается многочленами Чебышева, для которых величины в рекуррентном соотношении определяются равенствами  $A_0 = 1, B_0 = 0, A_i = 2, B_i = 0, C_i = 1, i \in N$ . Таким интерполяционным формулам на практике отдается предпочтение перед степенными (Лагранжа или Ньютона), поскольку в качестве критерия выбрано число обусловленности.

Число обусловленности в базисе  $P_k(x), k = \overline{0, n}$ , пространства  $P_n$  ( $P_n$  - линейное пространство многочленов порядка  $k \leq n$ ) позволяет вычислить возможное относительное изменение функции  $y(x)$  в результате единичного относительного изменения элементов вектора коэффициентов  $\{a_i\}$ . Будем рассматривать многочлены на отрезке  $[a; b]$ . Определим норму  $y(x)$  выражением  $\|y\| = \max_{x \in [a, b]} |y(x)|$ , а норму вектора  $\bar{a} = \{a_i\}$  - выражением  $\|\bar{a}\| = \max_{0 \leq i \leq n} |a_i|$ . В этом случае справедливо неравенство

$$m \|\bar{a}\| \leq \left\| \sum_{k=0}^n a_k P_k(x) \right\| \leq M \|\bar{a}\|, \quad m = \min_{\bar{a}} \frac{\left\| \sum_{i=0}^n a_i P_i \right\|}{\|\bar{a}\|}, \quad M = \max_{\bar{a}} \frac{\left\| \sum_{i=0}^n a_i P_i \right\|}{\|\bar{a}\|}. \quad (1.19)$$

Число обусловленности разложения (1.18) определяется как

$$\text{cond}(P) = \frac{M}{m} \geq 1. \quad (1.20)$$

При построении интерполирующего многочлена в форме (1.18) неизбежны ошибки либо округления, либо неточного задания функции в узлах интерполяции. Так что вместо точного значения вектора  $\bar{a}$  фактически получаем значение возмущенного вектора  $\bar{a} + d\bar{a}$ . Следовательно, вместо интерполяционного многочлена (1.18) будем иметь многочлен с возмущенными коэффициентами

$y + dy = \sum_{k=0}^n (a_k + da_k) P_k(x)$ . Теперь из (1.19) следует оценка

$$\frac{m \|d\bar{a}\|}{M \|\bar{a}\|} \leq \frac{\|dy\|}{\|y\|} \leq \frac{M \|d\bar{a}\|}{m \|\bar{a}\|},$$

которая показывает, что изменение вектора  $\bar{a}$  в отношении  $\|d\bar{a}\|/\|\bar{a}\|$  может привести в результате к относительному изменению  $\|dy\|/\|y\|$  значений многочлена  $y(x)$ , которое превосходит относительное изменение  $\bar{a}$  в  $\text{cond}(P)$  раз (но не менее, чем в  $1/\text{cond}(P)$  раз). Чем больше число обусловленности (1.20), тем больше возможное искажающее влияние "малого" относительного изменения или погрешности  $a$  на интерполирующий многочлен (1.18). Покажем это.

Без ущерба для общности допустим, что отрезок  $[a; b]$  таков, что  $|a| \leq b$ ,  $b > 0$ . В качестве системы интерполирующих многочленов выберем

$$P_k(x) = \left(\frac{x}{b}\right)^k, \quad k = \overline{0, n}. \quad \text{Тогда } M = \max_{\|c\| \leq 1} \left\| \sum_{k=0}^n c_k P_k(x) \right\| = n. \quad \text{Что касается нижней гра-}$$

ницы  $m$ , то, используя тождество  $P(x) = \left\| \sum_{i=0}^n \frac{P^{(i)}(0) b^i}{i!} \left(\frac{x}{b}\right)^i \right\|$  для произвольного

многочлена  $P(x)$  порядка не выше  $n$ , заключаем, что  $m^{-1} = \max_{0 \leq i \leq n} \max_{P \in P_n} \frac{|P^{(i)}(0) b^i|}{i! \|P\|}$ .

Воспользуемся соотношением  $\max_{P \in P_n} \frac{P^{(i)}(0)}{\|P\|} = T_n^{(i)} \left( \frac{a+b}{b-a} \right) \left( \frac{2}{b-a} \right)^i$ , справедливым при  $0 \leq a < b$ , где  $T_n(x)$  - многочлен Чебышева 1-го рода порядка  $n$ . Далее вы-

полняется  $T_n \left( \frac{a+3b}{b-a} \right) = \sum_{i=0}^n \frac{T_n^{(i)} \left( \frac{a+b}{b-a} \right)}{i!} \left( \frac{2b}{b-a} \right)^i$ , следовательно, справедлива

оценка для величины  $m$ :  $\frac{1}{n} T_n \left( \frac{a+3b}{b-a} \right) \leq \frac{1}{m} \leq T_n \left( \frac{a+3b}{b-a} \right)$ . Поскольку для боль-

ших значений аргумента  $x$  справедливо асимптотическое представление  $T_n(x) = \frac{1}{2} \left( x + \sqrt{x^2 - 1} \right)^n + \overline{0} \left( \frac{1}{x} \right)$ , то число обусловленности на отрезке  $[a; b]$  ста-

новится очень большим даже для фиксированного  $n$ . Это вызвано тем, что длина отрезка  $[a; b]$  становится малой по сравнению со значением многочленов на правом конце отрезка. Если строить интерполирующий многочлен по этому базису, ошибки округления или неточные исходные значения функции в узлах интерполяции приведут к значительной погрешности определения интерполирующего многочлена. В самом крайнем случае следует использовать локаль-

ный степенной базис  $\left( \frac{x-a}{b-a} \right)^i$ ,  $i = \overline{0, n}$ , на отрезке  $[a; b]$ . Значение его числа

обусловленности лежит на отрезке  $[T_n(3); nT_n(3)]$ .

Заметим без доказательства, что число обусловленности базиса Чебышева  $T_k(x)$ ,  $k = \overline{0, n}$ , не превосходит  $n\sqrt{2}$ , а базиса Лагранжа  $cond(P) \approx \frac{2}{p} \ln n + 1$ . Таким образом, полином Лагранжа почти наилучший.

## 2. ПРИБЛИЖЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ

### 2.1. Постановка задачи численного интегрирования

Если функция  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a; b]$  и известна хотя бы одна из ее первообразных функций  $F(x)$ , то определенный интеграл от функции  $f(x)$  на отрезке  $[a; b]$  вычисляется по формуле Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a), F'(x) = f(x). \quad (2.1)$$

Если же нахождение первообразной  $F(x)$  невозможно или представляет очень сложную задачу, то точное вычисление определенного интеграла по формуле (2.1) затруднительно. Поэтому большое значение имеют приближенные и, в первую очередь, численные методы вычисления определенных интегралов. В самой общей постановке задача численного интегрирования формулируется следующим образом:

вычислить приближенное значение интеграла (2.1) на основании ряда значений подынтегральной функции.

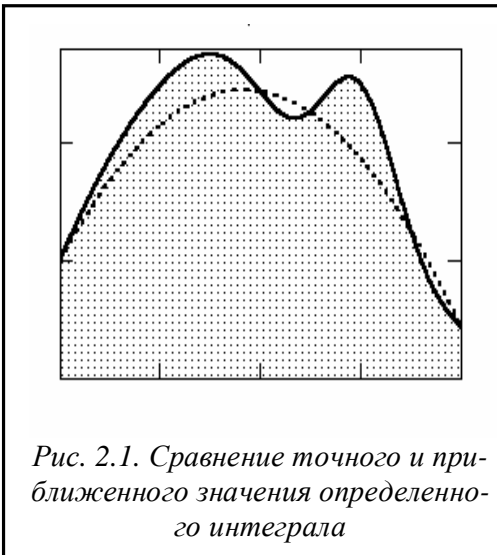
Численное вычисление определенного интеграла (2.1) называется механической квадратурой, двойного - механической кубатурой. Соответствующие формулы - квадратурными и кубатурными формулами. Таким образом, наша задача состоит в построении формул вида

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=0}^n a_k f(x_k) + R_n[f], \quad (2.2)$$

где  $a_i, i = \overline{0, n}$  - весовые коэффициенты квадратурной формулы,  $x_i, i = \overline{0, n}$  - узлы (шаблон) квадратурной формулы,  $R_n[f]$  - ошибка вычисления определенного интеграла.

Эта ошибка часто оценивается только сверху и, естественно, может быть получена только тогда, когда подынтегральная функция  $f(x)$ , а следовательно и ее свойства, известна аналитически. Приближенная формула интегрирования (2.2) линейна относительно подынтегральной функции. Именно такие формулы нашли в настоящее время наибольшее применение.

Очевидный прием получения формулы (2.2) состоит в том, что данную функцию  $f(x)$  на отрезке  $[a; b]$  заменяют другой, в некотором смысле близкой, например, интерполирующей функцией простого класса (многочле-



ном)  $\Phi(x)$ , а затем приближенно полагают:  $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \Phi(x)dx$ , при этом вы-

бор функции  $\Phi(x)$  очевиден: интеграл в правой части должен вычисляться непосредственно. На рис. 2.1 показано, что вместо вычисления точной площади криволинейной трапеции (она заштрихована) вычисляется площадь фигуры, расположенной под графиком интерполирующего полинома (точечная линия).

Покажем, как для этой цели можно использовать полиномы Лагранжа. Пусть подынтегральная функция  $f(x)$  известна в  $n+1$  точках  $x_k$ ,  $k = \overline{0, n}$ , отрезка  $[a; b]$ :  $y_k = f(x_k)$ ,  $k = \overline{0, n}$ . По этим значениям строим полином Лагранжа

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^n y_k \frac{p_{n+1}(x)}{(x-x_k)p'_{n+1}(x_k)}, \quad f(x) = L_n(x) + R_n(x). \quad \text{Тогда справедливо}$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b L_n(x)dx + \int_a^b R_n(x)dx = \sum_{k=0}^n a_k y_k + R_n[f],$$

где  $a_k$ ,  $k = \overline{0, n}$ , - весовые коэффициенты квадратурной формулы, они вычисляются непосредственно и не зависят от подынтегральной функции,

$R_n[f] = \int_a^b R_n(x)dx$  - ошибка квадратурной формулы (остаточный член). Итак, мы

имеем приближенную квадратурную формулу

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=0}^n a_k y_k, \quad a_k = \int_a^b \frac{p_{n+1}(x)}{(x-x_k)p'_{n+1}(x_k)} dx, \quad k = \overline{0, n}. \quad (2.3)$$

Отметим, что квадратурная формула называется формулой “замкнутого типа”, если концы отрезка интегрирования  $a$  и  $b$  являются узлами интерполирования, в противном случае - “открытого типа”. Кроме этого, весовые коэффициенты  $a_k$ ,  $k = \overline{0, n}$ , при заданном расположении узлов не зависят от выбора функции  $f(x)$  и для полинома порядка  $n$  формула (2.3) точная, так как в этом случае  $L_n(x) \equiv f(x)$ .

Полагая  $y = x^s$ ,  $s = \overline{0, n}$ , в формуле (2.3), получаем линейную относительно коэффициентов  $a_k$ ,  $k = \overline{0, n}$ , систему алгебраических уравнений

$$I_s = \int_a^b x^s dx = \frac{b^{s+1} - a^{s+1}}{s+1} = \sum_{k=0}^n a_k x_k^s, \quad s = \overline{0, n},$$

из которой определяются все весовые коэффициенты квадратурной формулы (2.3). Определитель этой системы линейных алгебраических уравнений - определитель Вандермонда

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_0 & x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_0^2 & x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ x_0^n & x_1^n & x_2^n & \dots & x_n^n \end{vmatrix} = \prod_{i>j} (x_i - x_j) \neq 0.$$

*Пример 2.1. Вывести квадратурную формулу вида*

$$\int_{-1}^1 y dx = A_0 y\left(-\frac{1}{2}\right) + A_1 y(0) + A_2 y\left(\frac{1}{2}\right).$$

*Решение. Полагая в предыдущей формуле  $y = x^k$ ,  $k = \overline{0,2}$ , и учитывая, что  $\int_{-1}^1 dx = 2$ ,  $\int_{-1}^1 x dx = 0$ ,  $\int_{-1}^1 x^2 dx = \frac{2}{3}$  получаем систему линейных уравнений относительно весовых коэффициентов квадратурной формулы:*

$$A_0 + A_1 + A_2 = 2, \quad -\frac{1}{2}A_0 + A_1 \cdot 0 + \frac{1}{2}A_2 = 0, \quad \frac{1}{4}A_0 + A_1 \cdot 0 + \frac{1}{4}A_2 = \frac{2}{3},$$

*откуда определяем неизвестные коэффициенты:  $A_0 = A_2 = \frac{4}{3}$ ,  $A_1 = -\frac{2}{3}$ . Иско-*

*мая квадратурная формула принимает вид:  $\int_{-1}^1 y dx = \frac{4}{3} y\left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{2}{3} y(0) + \frac{4}{3} y\left(\frac{1}{2}\right)$ .*

*Заметим, что поскольку верно  $\int_{-1}^1 x^3 dx = 0 = \frac{4}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^3 - \frac{2}{3} \cdot 0 + \frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3 = 0$  и*

*$\int_{-1}^1 x^4 dx = \frac{2}{5} \neq \frac{4}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^4 + \frac{2}{3} \cdot 0 + \frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{12}$ , то формула является точной и для многочленов порядка  $k = 3$ .*

Таким образом, для построения квадратурной формулы необходимо каким-то образом выбрать узлы и рассчитать весовые коэффициенты квадратурной формулы. Это можно сделать различными способами. Опишем некоторые из них.

## 2.2. Квадратурные формулы Ньютона - Котеса

В квадратурных формулах Ньютона - Котеса узлы задаются априорно, а весовые коэффициенты вычисляются с помощью интерполяционного полинома Лагранжа, совпадающего со значениями заданной функции в узлах сетки.

Пусть для заданной функции  $y = f(x)$  требуется вычислить интеграл

$\int_a^b f(x) dx$ . Выберем постоянный шаг  $h = \frac{b-a}{n}$  и построим на отрезке  $[a; b]$  рав-

номерную сетку  $x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ ,  $x_i = a + ih$ ,  $i = \overline{0, n}$ . Далее положим, что  $y_k = y(x_k)$ ,  $k = \overline{0, n}$ . Заменяя подынтегральную функцию  $y(x)$  соот-

ветствующим интерполяционным полиномом Лагранжа  $L_n(x)$ , получаем приближенную квадратурную формулу типа (2.2)

$$\int_{x_0=a}^{x_n=b} y(x) dx = \sum_{k=0}^n A_k y_k.$$

Заменяем в этой формуле подынтегральную функцию полиномом Лагранжа (1.5). Поскольку сетка равномерная, то после ввода новой переменной  $q = \frac{x-x_0}{n}$ ,  $dq = \frac{dx}{n}$  получим представление полинома Лагранжа в виде

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!} \frac{q^{[n+1]}}{q-i} y_i. \quad (2.4)$$

Отсюда, в силу линейности квадратурной формулы (2.2), получаем явные представления для коэффициентов

$$A_k = \int_{x_0}^{x_n} \frac{(-1)^{n-k} q^{[n+1]}}{k!(n-k)!(q-k)} dx = \left| dq = \frac{dx}{n} \right| = h \frac{(-1)^{n-k}}{k!(n-k)!} \int_0^n \frac{q^{[n+1]}}{(q-k)} dq, \quad k = \overline{0, n}. \quad (2.5)$$

На практике удобно пользоваться нормированными весовыми коэффициентами  $H_k = \frac{A_k}{b-a}$ ,  $k = \overline{0, n}$ , не зависящими от длины отрезка  $[a; b]$ . Для их вычисления справедлива следующая формула:

$$H_k = \frac{1}{n} \frac{(-1)^{n-k}}{k!(n-k)!} \int_0^n \frac{q^{[n+1]}}{(q-k)} dq, \quad k = \overline{0, n}, \quad (2.6)$$

и квадратурная формула на отрезке  $[a; b]$  принимает традиционный вид:

$$\int_a^b y dx = (b-a) \sum_{k=0}^n H_k y_k, \quad (2.7)$$

в которой весовые коэффициенты  $H_k$ ,  $k = \overline{0, n}$ , (коэффициенты Котеса) уже не зависят от отрезка интегрирования  $[a; b]$ , а определяются только количеством узлов на этом отрезке.

Здесь мы не будем проводить анализ погрешности общей квадратурной формулы, однако заметим, что ошибка оценивается погрешностью формулы интерполирования, а, следовательно, ее величина зависит от отрезка интегрирования  $[a; b]$ , количества узлов  $n$  и гладкости подынтегральной функции  $y(x)$ . Кроме этого, для значений  $n \leq 7$  все коэффициенты Котеса положительны, а это означает, что возможные ошибки вычислений не возрастают. Поэтому для построения квадратурных формул, имеющих приемлемую точность, используют следующий прием: отрезок интегрирования  $[a; b]$  разбивают на равные части и на каждой из таких частей строят квадратурную формулу вида (2.7) для значений  $n = 0, 1, 2, 3$ . Искомая квадратурная формула на всем отрезке  $[a; b]$  - сумма квадратурных формул по всем таким частичным отрезкам. Перейдем к построению таких формул.

### 2.3. Формула Симпсона

Формула Симпсона или, как ее еще называют, формула парабол, является частным случаем формулы Ньютона - Котеса (2.7). На первом шаге построим квадратурную формулу на отрезке  $[x-h; x+h]$ . Подынтегральную функцию на отрезке  $[x-h; x+h]$  заменяют интерполяционным многочленом Лагранжа с узлами интерполяции в точках  $x-h$ ,  $x$  и  $x+h$ . Положим  $y_0 = y(x-h)$ ,  $y_1 = y(x)$  и  $y_2 = y(x+h)$ . Из формулы (2.6) для значения  $n = 2$  получаем коэффициенты

$$H_0 = \frac{1}{4} \int_0^2 (q-1)(q-2) dq = \frac{1}{6}, \quad H_1 = -\frac{1}{2} \int_0^2 q(q-2) dq = \frac{2}{3}, \quad H_2 = \frac{1}{4} \int_0^2 q(q-1) dq = \frac{1}{6},$$

и квадратурную формулу

$$\int_{x-h}^{x+h} y(x) dx = \frac{h}{3} (y_0 + 4y_1 + y_2) = \frac{h}{3} [y(x-h) + 4y(x) + y(x+h)]. \quad (2.8)$$

Остаточный член формулы Симпсона на отрезке  $[x-h; x+h]$  равен

$$r(h) = \int_{x-h}^{x+h} y dx - \frac{h}{3} (y_0 + 4y_1 + y_2) = \int_{x-h}^{x+h} y dx - \frac{h}{3} (y(x-h) + 4y(x) + y(x+h)), \quad r(0) = 0.$$

Предполагая, что  $y(x) \in C^4[x-h; x+h]$ , последовательно продифференцируем функцию  $r(h)$  по переменной  $h$ :

$$r'(h) = \frac{2}{3} [y(x-h) + y(x+h)] - \frac{4}{3} y(x) - \frac{h}{3} [-y'(x-h) + y'(x+h)], \quad r'(0) = 0,$$

$$r''(h) = \frac{1}{3} [-y(x-h) + y(x+h)] - \frac{h}{3} [y''(x-h) + y''(x+h)], \quad r''(0) = 0,$$

$$r'''(h) = \frac{h}{3} [y'''(x-h) - y'''(x+h)] = -\frac{2h^2}{3} y^{(4)}(x), \quad x \in (x-h; x+h).$$

Теперь последовательно проинтегрируем  $r'''(h)$ , применяя для подынтегральной функции теорему о среднем (для удобства оставим прежние обозначения для точки  $x$ ):

$$r''(h) = r''(0) + \int_0^h r'''(t) dt = -\frac{2}{3} \int_0^h t^2 y^{(4)}(x) dt = -\frac{2}{9} h^3 y^{(4)}(x),$$

$$r'(h) = r'(0) + \int_0^h r''(t) dt = -\frac{2}{9} \int_0^h t^3 y^{(4)}(x) dt = -\frac{1}{18} h^4 y^{(4)}(x),$$

$$r(h) = r(0) + \int_0^h r'(t) dt = -\frac{1}{18} \int_0^h t^4 y^{(4)}(x) dt = -\frac{h^5}{90} y^{(4)}(x).$$

Таким образом, остаточный член формулы Симпсона (погрешность формулы Симпсона) равен  $r(h) = -\frac{h^5}{90} y^{(4)}(x)$ . Для многочленов третьего порядка четвертая производная тождественно равна нулю, а это означает, что формула Симпсона точная для всех многочленов порядка не выше третьего.



Теперь перейдем к построению общей квадратурной формулы на отрезке  $[a; b]$ . Пусть  $n = 2m$ . Положим  $h = \frac{b-a}{2m}$ . Рассмотрим интеграл

$$\int_a^b y(x)dx = \int_{x_0=a}^{x_2} y(x)dx + \int_{x_2}^{x_4} y(x)dx + \dots + \int_{x_{2m-2}}^{x_{2m}=b} y(x)dx = \sum_{i=1}^m \int_{x_{2(i-1)}}^{x_{2i}} y(x)dx.$$

Для вычисления интегралов под знаком суммы применим формулу (2.8):

$$\int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} ydx = \frac{h}{3}(y_{2i-2} + 4y_{2i-1} + y_{2i}) + r_i(h), \quad i = \overline{1, m},$$

где  $r_i(h)$  - ошибка квадратурной формулы на отрезке  $[x_{2i-2}; x_{2i}]$  (локальная

ошибка). Получаем  $\int_a^b ydx = \sum_{i=1}^m \frac{h}{3}(y_{2i-2} + 4y_{2i-1} + y_{2i}) + \sum_{i=1}^m r_i(h)$ . Если предполо-

жить, что  $y(x) \in C^4[a; b]$ , то  $R(h) = \sum_{i=1}^m r_i(h) = -\frac{h^5}{90} \sum_{i=1}^m y^{(4)}(x_i)$  - ошибка квадратурной формулы. После применения теоремы о среднем к функции  $y^{(4)}(x)$  получим

$$R(h) = \frac{mh^5}{90} y^{(4)}(x) = \frac{(b-a)h^4}{180} y^{(4)}(x). \quad (2.9)$$

Итак, квадратурная формула Симпсона для функции  $y(x)$  на отрезке  $[a; b]$  имеет вид

$$\int_a^b ydx = \frac{h}{3} [(y_0 + y_{2m}) + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{2m-1}) + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{2m-2})], \quad (2.10)$$

а мажорантная оценка ошибки приближенного интегрирования

$$|R(h)| = \frac{(b-a)h^4}{180} M, \quad M = \sup_{x \in [a; b]} |y^{(4)}(x)|. \quad (2.11)$$

*Пример 2.2.* Пользуясь формулой Симпсона, вычислить определенный интеграл  $\int_{-3}^3 \frac{dx}{1+x^2}$ .

*Решение.* Легко видеть, что интеграл вычисляется непосредственно, и он равен  $\int_{-3}^3 \frac{dx}{1+x^2} = \arctg x \Big|_{-3}^3 = 2\arctg 3 = 2.49809$  с абсолютной точностью

$2 \cdot 10^{-6}$ . Введем на отрезке  $[-3; 3]$  равномерную сетку с четным числом узлов

$n = 8$ ,  $h = \frac{6}{8} = 0.75$ . Вычислим значения функции  $y(x) = \frac{1}{1+x^2}$  в узлах сетки, ко-

торые сведем в табл. 2.1. Вычисляем значение интеграла по формуле (2.10)

$$\int_{-3}^3 \frac{dx}{1+x^2} \approx \frac{6}{3 \cdot 8} \left( \begin{array}{c} 0.1+0.1+ \\ +4(0.1649+0.64+0.64+0.1649)+ \\ +2(0.3077+1+0.3077) \end{array} \right) = 2.46759.$$

Таблица 2.1.

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
x <sub>i</sub>	-3	-2.25	-1.5	-0.75	0	0.75	1.5	2.25	3
y <sub>i</sub>	0.1	0.165	0.308	0.64	1	0.64	0.308	0.165	0.1

Несмотря на то, что для функции  $\frac{1}{1+x^2}$  интерполяционный многочлен Лагранжа значительно уклоняется от функции (это функция Рунге), результат приближенного интегрирования близок к точному значению. Оценим ошибку квадратурной формулы:  $y^{(4)}(x) = 12 \frac{2-23x^2+15x^4}{(1+x^2)^5}$ . На отрезке  $[-3;3]$  справедлива оценка модуля этой производной:  $|y^{(4)}(x)| \leq 7.535$ . Тогда для ошибки квадратурной формулы (2.10) получаем  $|R(h)| \leq \frac{6 \cdot 0.75^4}{180} 7.535 = 0.079$ , что хорошо согласуется с результатами вычислений:  $|2.46759 - 2.49809| < 0.079$ .

### 3. ПРИБЛИЖЕННОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ

#### 3.1. Постановка задачи численного дифференцирования

Задача приближенного (численного) дифференцирования функций возникает либо при необходимости нахождения производных табличных функций, заданных на некоторой сетке, либо в том случае, когда сама функция слишком сложна для аналитического дифференцирования.

Естественным решением такой задачи является непосредственное применение определения производной функции  $y'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{y(x_0 + \Delta x) - y(x_0)}{\Delta x}$ , которое приводит к приближенной формуле вычисления первой производной (численное или разностное дифференцирование вперед):  $y'(x_k) \approx \frac{\Delta y(x_k)}{\Delta x_k} = \frac{y(x_{k+1}) - y(x_k)}{x_{k+1} - x_k}$ . Такой метод численного дифференцирования

обладает несколькими недостатками. Первый – невысокая точность формулы. Если функция  $y(x)$  дважды дифференцируема на отрезке  $[a; b]$ , то, воспользовавшись формулой Тейлора, получаем равенство  $y(x_{k+1}) = y(x_k) + y'(x_k)(x_{k+1} - x_k) + \frac{1}{2} y''(\xi)(x_{k+1} - x_k)^2$ . Отсюда справедлива оценка точности формулы численного дифференцирования

$\left| y'(x_k) - \frac{\Delta y(x_k)}{\Delta x_k} \right| = \frac{1}{2} |y''(\xi)(x_{k+1} - x_k)|$ . Второй - то, что производные функции вычисляются только в узлах сетки. И третий - формула численного дифференцирования несимметрична относительно узла  $x_k$ . Ее альтернативой служит формула  $y'(x_k) \approx \frac{y(x_k) - y(x_{k-1}))}{x_k - x_{k-1}}$  - численного дифференцирования назад.

Для построения формул приближенного дифференцирования заменяют заданную на отрезке  $[a; b]$  функцию  $y(x)$ , какой-либо интерполирующей функцией  $\Phi(x)$ , а затем полагают, что с определенной точностью выполняется равенство:  $y'(x) = \Phi'(x)$ .

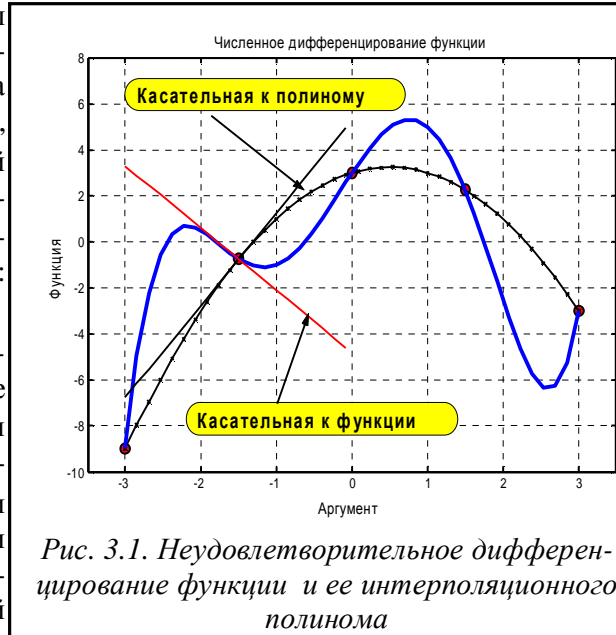
Если для интерполирующей функции  $\Phi(x)$  известна ее погрешность интерполирования  $R(x) = y(x) - \Phi(x)$ , то погрешность производной функции интерполирующей функции равна производной от погрешности этой функции. При всей простоте такого подхода задача

приближенного дифференцирования более сложная, нежели задача приближенного интегрирования. Например, близость ординат двух функций  $y(x)$  и  $y(x) + e \cos wx$  при  $|e| \ll 1$  совсем не гарантирует близости их производных при выполнении неравенства  $|ew| \gg 1$ . Рис. 3.1 иллюстрирует подобную ситуацию. Этот факт вполне объясним. Многочлен интерполирует функцию  $y(x)$ , а не ее производную  $y'(x)$ . Такого различия можно избежать, если для построения интерполирующего многочлена будет использоваться некоторая информация о предполагаемых или ожидаемых значениях производной.

Сформулируем задачу приближенного дифференцирования: для функции  $y(x)$ , заданной на некоторой сетке, найти производную в произвольной точке.

### 3.2. Формулы приближенного дифференцирования

Для решения этой задачи численного дифференцирования рассмотрим на отрезке  $[a; b]$  некоторую функцию  $y(x)$ , заданную на равномерной сетке  $x_k, i = \overline{0, n}, x_0 = a, x_n = b, h = \frac{b-a}{n}$ . На произвольных  $k$  узлах сетки ( $k \leq n$ ):  $x_0, x_1, \dots, x_k$  построим интерполяционный полином Ньютона  $N_k(x)$  по формуле



(1.17). Введем новую переменную  $q = \frac{x-x_0}{h}$ . Тогда для интерполяционного полинома Ньютона справедливо представление

$$y(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{q(q-1)(q-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \frac{q(q-1)(q-2)(q-3)}{4!}\Delta^4 y_0 + \dots, \quad (3.1)$$

в котором опущены слагаемые, старшие относительно степени  $q$ , и остаточный член  $R_k(x)$ . Так как справедливы очевидные тождества

$$\frac{dq}{dx} = \frac{1}{h}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dq} \frac{dq}{dx} = \frac{1}{h} \frac{dy}{dq} \quad \text{и} \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{h} \frac{dy}{dq} \right) = \frac{1}{h^2} \frac{d^2 y}{dq^2} \quad (3.2)$$

(формулы дифференцирования сложной функции) то, дифференцируя выражение (3.1) по переменной  $q$ , получаем формулу для первой производной:

$$y'(x) \approx \frac{1}{h} \left( \Delta y_0 + \frac{2q-1}{2} \Delta^2 y_0 + \frac{3q^2-6q+2}{6} \Delta^3 y_0 + \frac{2q^3-9q^2+11q-3}{12} \Delta^4 y_0 \right). \quad (3.3)$$

Аналогично, применяя второе тождество (3.2), получаем выражение для второй производной:

$$y''(x) \approx \frac{1}{h^2} \left( \Delta^2 y_0 + (q-1) \Delta^3 y_0 + \frac{6q^2-18q+11}{12} \Delta^4 y_0 \right). \quad (3.4)$$

Производные более высокого порядка находятся по той же схеме.

Замечание 1. Естественно полином Ньютона  $N_k(x)$  может быть построен на произвольной сетке, содержащей  $k+1$  узлов. Однако для получения большей точности следует выбирать узлы, наиболее близкие к точке  $x$ , а в качестве узла  $x_0$  взять самый близкий к точке  $x$ .

Замечание 2. Если требуется найти производные в узлах сетки, то формулы (3.3) и (3.4) для узла сетки  $x = x_0$ ,  $q = 0$  принимают вид:

$$y'(x) \approx \frac{1}{h} \left( \Delta y_0 - \frac{\Delta^2 y_0}{2} + \frac{\Delta^3 y_0}{3} - \frac{\Delta^4 y_0}{4} + \frac{\Delta^5 y_0}{5} \right), \quad (3.5)$$

$$y''(x) \approx \frac{1}{h^2} \left( \Delta^2 y_0 - \Delta^3 y_0 + \frac{11}{12} \Delta^4 y_0 - \frac{5}{6} \Delta^5 y_0 \right). \quad (3.6)$$

*Пример 3.1.* Для функции примера 1.3 найти производную в точке  $x = -1.5$ .

*Решение.* Воспользуемся таблицей разделенных разностей 1.1. Точка, в которой требуется найти производную, совпадает с узлом сетки. Подставляя в формулы (3.5) и (3.6) разделенные разности из второй строки табл. 1.1, получаем

$$y'(-1.5) = \frac{1}{1.5} \left( 0.462 - \frac{-0.308}{2} + \frac{0.092}{3} \right) = 0.431,$$

$$y''(-1.5) = \frac{1}{1.5^2} (-0.308 - 0.092) = -0.178.$$

### 3.3. Симметрические формулы дифференцирования

Построенные формулы используют лишь односторонние значения функции относительно точки  $x_0$ , ( $x_0 < x$ ), в которой вычисляется производная функции. Большую точность имеют симметрические формулы численного дифференцирования, учитывающие значения функции как для величин  $x > x_0$ , так и для величин  $x < x_0$ <sup>1</sup>.

На равномерной сетке  $\dots, x_{-k}, x_{-k+1}, \dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, x_k, \dots$  с шагом  $h$  построим интерполяционный многочлен Стирлинга

$$y(x) = y_0 + q\Delta y_{-\frac{1}{2}} + \frac{q^2}{2!} \Delta^2 y_{-1} + \frac{q(q^2-1)}{3!} \Delta^3 y_{-\frac{3}{2}} + \frac{q^2(q^2-1)}{4!} \Delta^4 y_{-2} +$$

$$+ \frac{q(q^2-1)(q^2-2^2)}{5!} \Delta^5 y_{-\frac{5}{2}} + \frac{q^2(q^2-1)(q^2-2^2)}{6!} \Delta^6 y_{-3} + \dots$$

Дифференцируя эту формулу по переменной  $x$ , с учетом (3.2) получаем

$$y'(x) = \frac{1}{h} \left( \Delta y_{-\frac{1}{2}} + q\Delta^2 y_{-1} + \frac{3q^2-1}{3!} \Delta^3 y_{-\frac{3}{2}} + \frac{2q^3-q}{12} \Delta^4 y_{-2} + \right.$$

$$\left. + \frac{5q^4-15q^2+4}{120} \Delta^5 y_{-\frac{5}{2}} + \frac{3q^5-10q^3+4q}{360} \Delta^6 y_{-3} + \dots \right)$$

$$y''(x) = \frac{1}{h^2} \left( \Delta^2 y_{-1} + q\Delta^3 y_{-\frac{3}{2}} + \frac{6q^2-1}{12} \Delta^4 y_{-2} + \right.$$

$$\left. + \frac{2q^3-3q}{12} \Delta^5 y_{-\frac{5}{2}} + \frac{15q^4-30q^2+4}{360} \Delta^6 y_{-3} + \dots \right)$$

В частности, в узле сетки  $x = x_0$  при  $q = 0$  имеем формулы:

$$y'(x_0) = \frac{1}{h} \left( \Delta y_{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{6} \Delta^3 y_{-\frac{3}{2}} + \frac{1}{30} \Delta^5 y_{-\frac{5}{2}} + \dots \right),$$

$$y''(x_0) = \frac{1}{h^2} \left( \Delta^2 y_{-1} - \frac{1}{12} \Delta^4 y_{-2} + \frac{1}{90} \Delta^6 y_{-3} + \dots \right).$$

<sup>1</sup> Эти формулы называют центральными формулами дифференцирования, в отличие от предыдущих формул, которые называются односторонними формулами дифференцирования.

Одним из применений формул численного дифференцирования является построение разностных уравнений для численного решения задач Коши либо краевых задач математической физики. В этом случае формулы численного дифференцирования должны быть выражены непосредственно через значения функции в узлах сетки. Как правило, и ее производные необходимы либо в самих узлах сетки, либо в средних точках. Для построения таких формул используются интерполяционные многочлены, непосредственно зависящие от значений функции в узлах сетки, например, полиномы Лагранжа.

Рассмотрим равномерную сетку. Преобразуем функцию  $p_{n+1}(x)$  и ее производную в полиноме Лагранжа на случай равномерной сетки:

$$\begin{aligned} p_{n+1}(x) &= \prod_{i=0}^n (x - x_i) = h^{n+1} \prod_{i=0}^n (q - i) = h^{n+1} q^{[n+1]}, \\ p'_{n+1}(x) &= \sum_{k=0}^n \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n (x - x_i), \quad p'_{n+1}(x_k) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n (x_k - x_i) = (-1)^{n-k} h^n k! (n-k)!. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Тогда полином Лагранжа на равномерной сетке примет вид

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^n y_k \frac{(-1)^{n-k} q^{[n+1]}}{k!(n-k)! q - k}, \quad q = \frac{x - x_0}{h}.$$

Учитывая правила дифференцирования по переменной  $x$  (3.2) получаем формулы численного дифференцирования:

$$\begin{aligned} y'(x) &\approx L'_n(x) = \frac{1}{h} \sum_{k=0}^n y_k \frac{(-1)^{n-k}}{k!(n-k)!} \frac{d}{dq} \left[ \frac{q^{[n+1]}}{q - k} \right], \\ y''(x) &\approx L''_n(x) = \frac{1}{h^2} \sum_{k=0}^n y_k \frac{(-1)^{n-k}}{k!(n-k)!} \frac{d^2}{dq^2} \left[ \frac{q^{[n+1]}}{q - k} \right]. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Если для погрешности интерполирования полиномом Лагранжа справедлива формула  $R_n(x) = y(x) - L_n(x) = \frac{y^{(n+1)}(x)}{(n+1)!} p_{n+1}(x)$ , то погрешность вычисления первой производной функции  $y(x) \in C^{n+2}(a; b)$  в произвольной точке будет определяться равенством

$$r_n^{(1)}(x) = R'_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} \left[ p'_{n+1}(x) y^{(n+1)}(x) + p_{n+1}(x) \frac{d}{dx} (y^{(n+1)}(x)) \right],$$

а погрешность второй производной функции  $y(x) \in C^{n+3}(a; b)$  по формуле

$$\begin{aligned} r_n^{(2)}(x) = R''_n(x) &= \frac{1}{(n+1)!} \left[ p''_{n+1}(x) y^{(n+1)}(x) + \right. \\ &\quad \left. + 2p'_{n+1}(x) \frac{d}{dx} (y^{(n+1)}(x)) + p_{n+1}(x) \frac{d^2}{dx^2} (y^{(n+1)}(x)) \right]. \end{aligned}$$

Положение точки  $\mathbf{x}$  в общем случае не определяется аналитически, поэтому явное значение ошибки дифференцирования может быть найдено только в узлах сетки и только для первой производной функции. Поскольку в узлах сетки  $p_{n+1}(x_k) = 0$ ,  $k = \overline{0, n}$ , то

$$r_n^{(1)}(x_k) = \frac{1}{(n+1)!} p'_{n+1}(x_k) y^{(n+1)}(\mathbf{x}), \quad k = \overline{0, n},$$

для погрешности вычисления первой производной и

$$r_n^{(2)}(x_k) = \frac{1}{(n+1)!} \left[ p''_{n+1}(x_k) y^{(n+1)}(\mathbf{x}) + 2p'_{n+1}(x_k) \frac{d}{dx} (y^{(n+1)}(\mathbf{x})) \right]$$

для погрешности второй производной. С учетом формул (3.7) погрешности вычислений производных находятся по формуле:

$$r_n^{(i)}(x_k) = \frac{(-1)^{n-k} k! (n-k)! h^n}{(n+1)!} y^{(n+1)}(\mathbf{x}). \quad (3.9)$$

Наибольшие применения получили формулы расчета производных по трем, четырем и пяти точкам (соответственно трех-, четырех- и пятиточечный шаблон дифференцирования).

### 3.3.1. Дифференцирование на трехточечном шаблоне

Пусть  $n = 2$ . Шаблон дифференцирования состоит из трех точек:  $x_0, x_1, x_2$ <sup>1</sup>. Тогда на основании формулы (3.8) получаем полином Лагранжа

$$L_2(x) = \frac{1}{2} y_0 (q-1)(q-2) - y_1 q(q-2) + \frac{1}{2} y_2 q(q-1)$$

и его производные первого и второго порядков:

$$L'_2(x) = \frac{1}{h} \left[ \frac{1}{2} y_0 (2q-3) - y_1 (2q-2) + \frac{1}{2} y_2 (2q-1) \right], \quad L''_2(x) = \frac{1}{h^2} [y_0 - 2y_1 + y_2].$$

Полагая  $x = x_k$ ,  $k = 0, 1, 2$ , получаем соответственно, что  $q = 0, 1, 2$ , а производные первого порядка в узлах шаблона вычисляются по формулам:

$$y'_0 = \frac{1}{2h} (-3y_0 + 4y_1 - y_2), \quad y'_1 = \frac{1}{2h} (-y_0 + y_2), \quad y'_2 = \frac{1}{2h} (y_0 + 4y_1 + 3y_2)$$

с погрешностями численного дифференцирования в узлах сетки:

$$r_0^{(1)} = r_2(x_0) = \frac{1}{3} h^2 y'''(\mathbf{x}_0), \quad r_1^{(1)} = r_2(x_1) = -\frac{1}{6} h^2 y'''(\mathbf{x}_1), \quad r_2^{(1)} = r_2(x_2) = \frac{1}{3} h^2 y'''(\mathbf{x}_2).$$

Для производной второго порядка во всех узлах шаблона получается одна формула:

$$y''_0 = y''_1 = y''_2 = \frac{1}{h^2} (y_0 - 2y_1 + y_2).$$

<sup>1</sup> Эти шаблоны для  $n = 2, 3, 4$  и формулы дифференцирования, полученные на их основе, наиболее употребительны в разностных моделях математической физики.

### 3.3.2. Дифференцирование на четырехточечном шаблоне

Пусть  $n = 3$ . Шаблон дифференцирования состоит из четырех точек:  $x_0, x_1, x_2, x_3$ . Тогда на основании формулы (3.8) получаем полином Лагранжа

$$L_3(x) = -\frac{1}{6} y_0 (q-1)(q-2)(q-3) + \frac{1}{2} y_1 q (q-2)(q-3) + \\ + \frac{1}{2} y_2 q (q-1)(q-3) + \frac{1}{6} y_3 q (q-1)(q-2)$$

и его производные первого и второго порядков:

$$L'_3(x) = \frac{1}{6h} [y_0 (-3q^2 + 12q - 11) + y_1 (9q^2 - 30q + 18) + \\ + y_2 (-9q^2 + 24q - 9) + y_3 (3q^2 - 6q + 2)], \\ L''_3(x) = \frac{1}{h^2} [y_0 (-q + 2) + y_1 (3q - 5) + y_2 (-3q + 4) + y_3 (q - 1)].$$

Полагая  $x = x_k, k = 0, 1, 2, 3$ , получаем соответственно, что  $q = 0, 1, 2, 3$ , а производные первого порядка в узлах шаблона вычисляются по формулам:

$$y'_0 = \frac{1}{6h} (-11y_0 + 18y_1 - 9y_2 + 2y_3), \quad y'_1 = \frac{1}{6h} (-2y_0 - 3y_1 + 6y_2 - y_3), \\ y'_2 = \frac{1}{6h} (y_0 - 6y_1 + 3y_2 + 2y_3), \quad y'_3 = \frac{1}{6h} (-2y_0 + 9y_1 - 18y_2 + 11y_3)$$

с погрешностями дифференцирования:

$$r_0^{(1)} = r_3(x_0) = -\frac{h^3}{4} y^{(4)}(x_0), \quad r_1^{(1)} = r_3(x_1) = \frac{h^3}{12} y^{(4)}(x_1), \\ r_2^{(1)} = r_3(x_2) = -\frac{h^3}{12} y^{(4)}(x_2), \quad r_3^{(1)} = r_3(x_3) = -\frac{h^3}{4} y^{(4)}(x_3).$$

Для производной второго порядка в узлах шаблона верны формулы:

$$y''_0 = \frac{1}{h^2} (2y_0 - 5y_1 + 4y_2 - y_3), \quad y''_1 = \frac{1}{h^2} (y_0 - 2y_1 + y_2), \\ y''_2 = \frac{1}{h^2} (y_1 - 2y_2 + y_3), \quad y''_3 = \frac{1}{h^2} (-y_0 + 4y_1 - 5y_2 + 2y_3).$$

### 3.3.3. Дифференцирование на пятиточечном шаблоне

Пусть  $n = 4$ . Шаблон дифференцирования состоит из пяти точек:  $x_0, x_1, x_2, x_3, x_4$ . Тогда на основании формулы (3.8) получаем полином Лагранжа

$$L_4(x) = \frac{1}{24} y_0 (q-1)(q-2)(q-3)(q-4) - \frac{1}{6} y_1 q (q-2)(q-3)(q-4) + \\ + \frac{1}{4} y_2 q (q-1)(q-3)(q-4) - \frac{1}{6} y_3 q (q-1)(q-2)(q-4) + \frac{1}{24} y_4 q (q-1)(q-2)(q-3)$$

и его производные первого и второго порядков:



$$L_4'(x) = \frac{1}{12h} \left[ y_0(2q^3 - 15q^2 + 35q - 25) + y_1(-8q^3 + 54q^2 - 104q + 48) + \right. \\ \left. + y_2(12q^3 - 72q^2 + 114q - 36) + y_3(-8q^3 + 42q^2 - 56q + 16) + y_4(2q^3 - 9q^2 + 11q - 3) \right],$$

$$L_4''(x) = \frac{1}{12h^2} \left[ y_0(6q^2 - 30q + 35) + y_1(-24q^2 + 108q - 104) + \right. \\ \left. + y_2(36q^2 - 144q + 114) + y_3(-24q^2 + 84q - 56) + y_4(6q^2 - 18q + 11) \right].$$

Полагая  $x = x_k, k = 0, 1, 2, 3, 4$ , получаем соответственно, что  $q = 0, 1, 2, 3, 4$ , а производные первого порядка в узлах шаблона вычисляются по формулам:

$$y_0' = \frac{1}{12h} (-25y_0 + 48y_1 - 36y_2 + 16y_3 - 3y_4),$$

$$y_1' = \frac{1}{12h} (-3y_0 + 10y_1 + 18y_2 - 6y_3 + y_4), \quad y_2' = \frac{1}{12h} (y_0 - 8y_1 + 8y_3 - y_4),$$

$$y_3' = \frac{1}{12h} (-y_0 + 6y_1 - 18y_2 + 10y_3 + 3y_4),$$

$$y_4' = \frac{1}{12h} (3y_0 - 16y_1 + 36y_2 - 48y_3 + 25y_4)$$

с погрешностями дифференцирования в узлах сетки:

$$r_0^{(1)} = r_4(x_0) = \frac{h^4}{5} y^{(5)}(x_0), \quad r_1^{(1)} = r_4(x_1) = -\frac{h^4}{20} y^{(5)}(x_1),$$

$$r_2^{(1)} = r_4(x_2) = \frac{h^4}{30} y^{(5)}(x_2), \quad r_3^{(1)} = r_4(x_3) = -\frac{h^4}{20} y^{(5)}(x_3),$$

$$r_4^{(1)} = r_4(x_4) = \frac{h^4}{5} y^{(5)}(x_4).$$

Для производной второго порядка в узлах шаблона получаются формулы:

$$y_0'' = \frac{1}{12h^2} (35y_0 - 104y_1 + 114y_2 - 56y_3 + 11y_4),$$

$$y_1'' = \frac{1}{12h^2} (11y_0 - 20y_1 + 6y_2 + 4y_3 - y_4),$$

$$y_2'' = \frac{1}{12h^2} (-y_0 + 16y_1 - 30y_2 + 16y_3 - y_4),$$

$$y_3'' = \frac{1}{12h^2} (-y_0 + 4y_1 + 6y_2 - 20y_3 + 11y_4),$$

$$y_4'' = \frac{1}{12h^2} (11y_0 - 56y_1 + 114y_2 - 104y_3 + 35y_4),$$

Из выведенных формул видно, что в центральных узлах шаблона точность вычисления производных на равномерной сетке самая высокая.

*Пример 3.2. Методом конечных разностей найти решение краевой задачи на интервале  $(0;4)$  для дифференциального уравнения второго порядка  $(1+x^2)y'' + \left(\frac{9}{10}x - \frac{3}{2}\right)y = 0.8(9x^4 - 24x^3 - 80)$  с однородными граничными условиями первого рода.*

*Решение. На отрезке  $[0;4]$  введем равномерную сетку с  $n=13$  узлами. Выберем постоянный шаг сетки  $h = \frac{4-0}{12} = \frac{1}{3}$  и ее узлы  $x_i = a + hi$ ,  $i = \overline{0,12}$ . Для аппроксимации второй производной функции воспользуемся трехточечным шаблоном. Тогда во внутренних точках сетки для второй производной функции справедлива разностная аппроксимация:  $y_i'' = y''(x_i) = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}$ . Перейдем к построению разностной задачи. Во внутренних узлах сетки рассмотрим разностные уравнения*

$$\left(1+x_i^2\right)\frac{y_{i+1}-2y_i+y_{i-1}}{h^2} + \left(\frac{9}{10}x_i - \frac{3}{2}\right)y_i = 0.8(9x_i^4 - 24x_i^3 - 80), \quad i = \overline{1,11},$$

*аппроксимирующие заданное дифференциальное уравнение. После очевидных преобразований разностные уравнения принимают вид:*

$$\begin{aligned} \left(1+x_i^2\right)\frac{y_{i-1}}{h^2} + \left(-\frac{2(1+x_i^2)}{h^2} + \left(\frac{9}{10}x_i - \frac{3}{2}\right)\right)y_i + \left(1+x_i^2\right)\frac{y_{i+1}}{h^2} = \\ = 0.8(9x_i^4 - 24x_i^3 - 80), \quad i = \overline{1,11}. \end{aligned}$$

*Погрешность аппроксимации исходного непрерывного уравнения разностным уравнением имеет локальный порядок  $\overline{O}\left(\frac{1}{h^2}\right)$ . В граничных узлах сетки точно аппроксимируем однородные граничные условия равенствами. Это приведет дополнительно к двум разностным уравнениям: в первом узле  $y_0 = 0$  и в последнем  $y_{12} = 0$ . Запишем разностную задачу в матричном виде*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 10 & -21.2917 & 10 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 13 & -27.0833 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -259.2083 & 130 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_{11} \\ y_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -39.765 \\ -37.877 \\ \dots \\ 683.01 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

*Решая это матричное уравнение относительно вектора  $y$ , получаем решение разностной краевой задачи:  $y = (0, 3.26, 2.96, 0, \dots, -13.04, 0)$ . На рис. 3.2 маркерами показано построенное разностное решение краевой задачи. Непрерывной линией на том же рисунке изображено и точное решение этой краевой задачи*

$y(x) = 8x(x-1)(x-4)$ . Рисунок иллюстрирует удовлетворительное совпадение этих двух решений.

#### 4. КУСОЧНО-МНОГОЧЛЕННАЯ АППРОКСИМАЦИЯ

Рассмотренные в предыдущих разделах методы интерполирования предполагали, что значения функции в узлах сетки известны с любой наперед заданной точностью. Но даже и в этом случае построение интерполирующего многочлена приводит в некоторых случаях к значительным ошибкам. Анализ выражений для ошибок интерполяции подсказывает один из способов улучшения качества интерполяции: уменьшить отрезок интерполирования.

Идея кусочно-многочленной аппроксимации состоит в том, что на каждом отрезке между двумя узлами сетки строят свой интерполирующий многочлен. Если коэффициенты многочленов определяются неоднозначно, то вводят некоторые дополнительные условия, гарантирующие однозначность интерполяционного многочлена. Основные идеи такого метода интерполяции обсуждаются далее в этом разделе.

##### 4.1. Кусочно-линейная аппроксимация

Кусочно-линейная аппроксимация, возможно, не имеет такого широкого практического значения, как использование кубических сплайнов или аппроксимация кусочно-многочленными функциями более высокого порядка. Однако на ее примере в простой и доходчивой форме можно рассмотреть основные особенности кусочно-многочленной аппроксимации.

Обозначим кусочно-линейную функцию, или другими словами, ломаную линию, интерполирующую данную функцию  $y(x)$  в узлах сетки отрезка  $[a; b]$   $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ ,  $x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$  через  $Sp_1 y$ . Индекс 1 относится к порядку многочленных частей, которые составляют интерполяционную функцию. На отрезке  $[x_i; x_{i+1}]$  интерполяционная функция - линейная функция и задается в виде полинома Ньютона:

$$Sp_1 y(x) = y_i + (x - x_i)[x_i, x_{i+1}] = y_i + \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}(x - x_i), \quad i = \overline{0, n-1}. \quad (4.1)$$

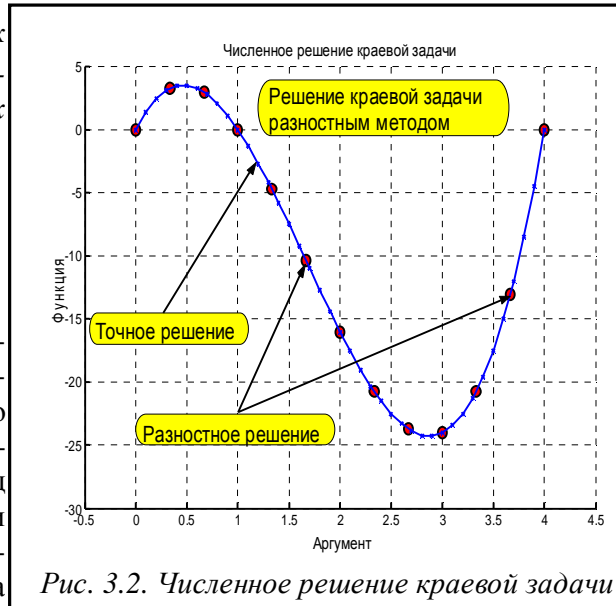


Рис. 3.2. Численное решение краевой задачи

Так как справедливо  $y(x) = y_i + (x - x_i)[x_i, x_{i+1}] + (x - x_i)(x - x_{i+1})[x_i, x_{i+1}, x]$  на отрезке  $[x_i; x_{i+1}]$ , то для  $\forall x \in [x_i; x_{i+1}]$  получим оценку погрешности кусочно-линейной интерполяции

$$|y(x) - Sp_1 y| = |(x - x_i)(x - x_{i+1})[x_i, x_{i+1}, x]| < \frac{1}{2} \left( \frac{\Delta x_i}{2} \right)^2 \max_{x \in [x_i; x_{i+1}]} |y''(x)|. \quad (4.2)$$

Из этого выражения следует, что погрешность можно сделать сколь угодно малой, просто выбирая длины отрезков  $\Delta x_i$  достаточно малыми для всех значений индекса  $i$ . И хотя такая процедура увеличивает число параметров, необходимых для описания интерполирующего полинома  $Sp_1 y$ , сложность вычислений при этом не увеличивается, так как на каждом отрезке  $[x_i; x_{i+1}]$  функция  $Sp_1 y$  - прямая линия.

Пусть  $Sp_1[y]$  - линейное пространство всех ломаных линий на интервале  $[a; b]$  с изломами в точках  $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ . Очевидно, что  $Sp_1 f = f, \forall f \in Sp_1[f]$ . Далее имеем  $\|Sp_1 y\| = \max_i |Sp_1 y(x_i)| = \max_i |y(x_i)| \leq \|y\|$ . Поэтому справедливо неравенство  $\|Sp_1 y\| \leq \|y\|, \forall y(x) \in C[a; b]$ . Оценим отклонение  $y$  от  $Sp_1 y$ :

$$\|y - Sp_1 y\| = \|(y - f) - Sp_1(y - f)\| \leq \|y - f\| + \|y - f\| = 2\|y - f\|, \\ \forall y \in C[a; b], \forall f \in Sp_1[f]$$

Отсюда получаем, что выполняется неравенство (оценки точности кусочно-линейной интерполяции)

$$d \leq \|y - Sp_1 y\| \leq 2d, \quad (4.3)$$

где  $d$  - расстояние от функции  $y(x)$  до линейного пространства  $Sp_1[y]$ . Неравенство (4.3) показывает, что можно было бы в лучшем случае уменьшить погрешность в 2 раза, перейдя к наилучшей аппроксимации функции  $y(x)$  ломаными линиями.

#### 4.2. Аппроксимация ломаными линиями по методу наименьших квадратов

Любую задачу построения интерполяционного многочлена можно сформулировать в терминах некоторой задачи оптимизации. В заданном классе "хороших" функций  $F$  найти такую функцию  $\hat{O}(x)$ , отклонение которой в некоторой норме от заданной функции  $y(x)$  будет наименьшей:

$$\hat{O}(x) = \arg \min_{\hat{O}(x) \in F} \|y(x) - \hat{O}(x)\|. \quad (4.4)$$

Выбирая различные нормы  $\|\cdot\|$ , очевидно, будем получать различные функции  $\hat{O}(x)$ . До сих пор при построении интерполирующих многочленов Лагранжа и Ньютона использовалась точечная (равномерная) норма:

$$\|y(x) - \hat{O}(x)\| = \max_i |y(x_i) - \hat{O}(x_i)|. \quad (4.5)$$

Кроме этой нормы, используется евклидова норма в дискретном или непрерывном пространстве функций, нормы  $l_2$  и  $L_2$  соответственно:

$$\|y(x) - \hat{O}(x)\|^2 = \sum_{i=0}^n [y(x_i) - \hat{O}(x_i)]^2, \quad \|y(x) - \hat{O}(x)\|^2 = \int_a^b [y(x) - \hat{O}(x)]^2 dx, \quad (4.6)$$

При использовании таких норм говорят, что задача (4.4) решается методом наименьших квадратов (МНК).

Прежде чем перейти к рассмотрению таких понятий, как аппроксимация сплайнами по МНК, проанализируем аппроксимацию ломаными линиями по методу МНК. Для этого рассмотрим на отрезке  $[a; b]$  систему кусочно-линейных функций  $u_k(x)$ ,  $k = \overline{0, n}$ , удовлетворяющих следующим условиям: 1) носитель функций  $u_k(x)$ ,  $k = \overline{1, n-1}$ , - два смежных полуинтервала содержащих узел  $x_k$ :

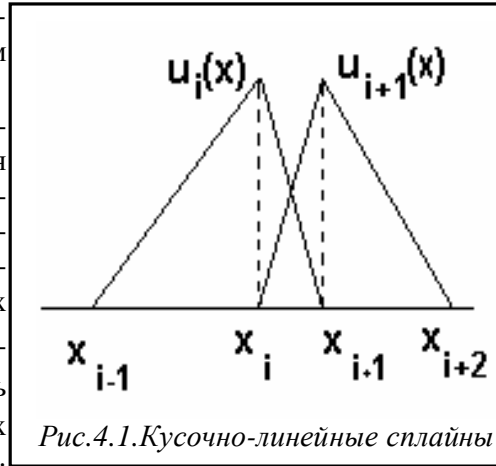


Рис.4.1. Кусочно-линейные сплайны

и  $u_k(x) = (x_{k-1}; x_{k+1}]$ ,  $k = \overline{1, n-1}$ ; носителями первой  $u_0(x)$  и последней функций  $u_n(x)$  являются соответственно отрезки:  $[x_0; x_1]$  и  $[x_{n-1}; x_n]$ ; 2) во всех узлах сетки функция  $u_k(x)$  равна нулю, за исключением узла  $x_k$ , в котором она равна единице. Всем этим условиям удовлетворяет система функций, построенная по следующим формулам:

$$u_k(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{k-1}}{x_k - x_{k-1}}, & x_{k-1} \leq x < x_k, \quad k = \overline{1, n}, \\ \frac{x_{k+1} - x}{x_{k+1} - x_k}, & x_k \leq x < x_{k+1}, \quad k = \overline{0, n-1}, \\ 0, & x < x_{k-1}, \quad x \geq x_{k+1}. \end{cases} \quad (4.7)$$

Эти функции называются “шапочными функциями” или шапо-функциями. Ясно, что  $u_i(x) \in Sp_1[y]$  и  $u_i(x_j) = d_{ij} \cdot \sum_{k=0}^n y_k u_k(x)$  - элемент пространства  $Sp_1[y]$ , значения которого в узлах интерполяции равны значениям функции. Вследствие линейной независимости функций  $u_i(x)$ ,  $i = \overline{0, n}$  (каждая из них отлична от нуля только в одном узле сетки), этот элемент единствен. Отсюда

$$Sp_1 y = \sum_{k=0}^n y_k u_k(x) \quad (4.8)$$

- интерполирующая ломаная функция. При этом  $u_i(x)$ ,  $i = \overline{0, n}$ , - базис линейного пространства размерностью  $n+1$ , а  $(y_0, y_1, \dots, y_n)$  - координаты интерполи-

рующей функции в этом базисе. Функция (4.8) - решение экстремальной задачи (4.4).

Пусть  $L_1 y$  - функция, аппроксимирующая функцию  $y(x)$  по МНК, в пространстве  $Sp_1[y]$ , т.е.

$$L_1 y = \arg \min_{f \in Sp_1[y]} \|y(x) - f(x)\|^2 = \arg \min_{f \in Sp_1[y]} \int_a^b [y(x) - f(x)]^2 dx. \quad (4.9)$$

Предполагая, что для функции  $L_1 y$  допустимо представление

$$L_1 y = \sum_{i=0}^n a_i u_i(x), \quad (4.10)$$

найдем минимум выражения (4.9), подставляя в него вместо функции  $f(x)$  правую часть (4.10) и приравнявая к нулю частные производные (4.9) по  $a_i$ ,  $i = \overline{0, n}$ . Получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно  $a_i$ ,  $i = \overline{0, n}$ :

$$\sum_{k=0}^n a_k \left[ \int_a^b u_i(x) u_k(x) dx \right] = \int_a^b u_i(x) y(x) dx, \quad i = \overline{0, n}. \quad (4.11)$$

Входящие в эту систему интегралы вычисляются аналитически, и мы получаем следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\Delta x_{i-1}}{6} a_{i-1} + \frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{3} a_i + \frac{\Delta x_i}{6} a_{i+1} = \int_a^b u_i(x) y(x) dx = \beta_i, & i = \overline{0, n}, \\ a_{-1} = 0, \quad a_{n+1} = 0. \end{cases} \quad (4.12)$$

Матрица коэффициентов системы (4.12) - трехдиагональная со строгим диагональным преобладанием. Поэтому система (4.12) имеет только одно решение, и это решение определяется методом исключения Гаусса<sup>1</sup>.

**Теорема 4.1.**  $L_1 y$  - аппроксимация функции  $y(x) \in C[a; b]$  элементами из пространства  $Sp_1 y$  удовлетворяет неравенству  $\|L_1 y\| \leq 3\|y\|$ , и справедлива оценка аппроксимации  $\|y - L_1 y\| \leq 4d$ , где  $d$  - расстояние функции  $y(x)$  до линейного пространства  $Sp_1 y$ .

*Доказательство.* Чтобы выразить  $\|L_1 y\| = \max_{\{x_i\}} |L_1 y| = \max_i |a_i|$  через  $\|y\|$ ,

умножим обе части уравнения (4.12) на  $\frac{6}{x_{i+1} - x_{i-1}}$ . Получим уравнение

$$\frac{\Delta x_{i-1}}{x_{i+1} - x_{i-1}} a_{i-1} + 2a_i + \frac{\Delta x_i}{x_{i+1} - x_{i-1}} a_{i+1} = 3\hat{b}_i, \quad i = \overline{1, n-1}.$$

<sup>1</sup> Вектор  $a = (a_0, a_1, \dots, a_n)$ , также как и правая часть формулы 4.10, называется сплайном.

Поскольку выполняется соотношение  $x_{i+1} - x_{i-1} = \Delta x_{i-1} + \Delta x_i$ , то из последнего уравнения получаем

$$|2a_i| = \frac{|3\hat{b}_i - (a_{i-1}\Delta x_{i-1} + a_{i+1}\Delta x_{i+1})|}{\Delta x_{i-1} + \Delta x_i} \leq 3|\hat{b}_i| + |a_i| \text{ или } \|a\| \leq 3\|\hat{b}\| \leq 3\|b\|.$$

С другой стороны,  $\hat{b}_i = \int_a^b \hat{u}_i(x)y(x)dx$ ,  $\hat{u}_i(x) = \frac{2}{x_{i+1} - x_{i-1}}u_i(x)$ ,  $\int_a^b \hat{u}_i(x)dx = 1$ .

Поэтому верна оценка  $|\hat{b}_i| = \left| \int_a^b \hat{u}_i(x)y(x)dx \right| \leq \|y\|$ . Последнее и доказывает, что справедливо  $\|L_1 y\| \leq 3\|y\|$ . Теорема доказана. ▲

В заключение заметим, что функция  $L_1 y$  не обязательно в узлах сетки совпадает со значениями интерполируемой функции  $y(x)$ .

С точки зрения современной терминологии, функция, совпадающая с заданной в узлах сетки, называется интерполирующей [находится как решение задачи оптимизации (4.5)], в то время как функция, построенная в задаче (4.6), называется аппроксимирующей или сглаживающей.

*Пример 4.1. Построить кусочно-линейную аппроксимацию функции  $\cos 1.5x$  на отрезке  $[0; p]$ , используя метрику  $L_2[0; p]$ .*

*Решение. Построим на отрезке  $[0; p]$  сетку с равномерным шагом  $\left[0, \frac{p}{4}, \frac{p}{2}, \frac{3p}{4}, p\right]$ . Тогда матрица системы линейных уравнений (4.12) и вектор правых частей будут равны:*

$$A = \begin{bmatrix} 0.2618 & 0.1309 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1309 & 0.5236 & 0.1309 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1309 & 0.5236 & 0.1309 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1309 & 0.5236 & 0.1309 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1309 & 0.2618 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0.34933 \\ 0.26737 \\ -0.49403 \\ -0.64548 \\ -0.14386 \end{bmatrix}.$$

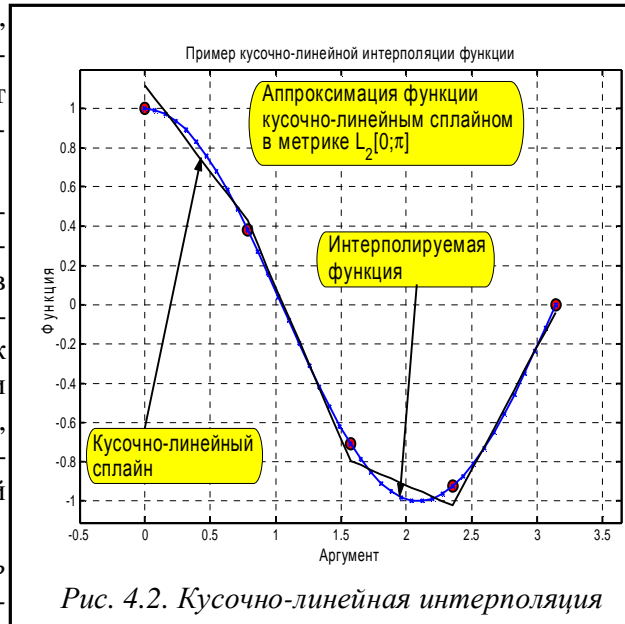


Рис. 4.2. Кусочно-линейная интерполяция

Решение системы  $A\alpha = B$  (коэффициенты кусочно-линейного сплайна) -  $\alpha = (1.1197, 0.42998, -0.79476, -1.0248, -0.0371)$ . Графики исходной функции и ее аппроксимирующего кусочно-линейного сплайна показаны на рис. 4.2. Как и следовало ожидать, наибольшее отклонение аппроксимирующего сплайна произошло в окрестности наибольшего по модулю значения второй производной функции.

### 4.3. Кусочная интерполяция кубическими многочленами

Аппроксимация ломаными линиями не может быть очень гладкой или очень эффективной. Для получения более гладкой и более эффективной аппроксимации нужно использовать кусочно-многочленные функции, состоящие из многочленов более высокого порядка. Наиболее часто в качестве аппроксимирующих функций использовались кусочно-многочленные функции, составленные из многочленов третьего порядка. Методов построения таких кусочно-многочленных функций несколько. Опишем некоторые из них.

Здесь и далее будем считать, что на каждом отрезке  $[x_i; x_{i+1}]$  функция  $y(x)$  согласуется с некоторым многочленом третьего порядка  $p_i(x)$  по правилу:

$$\begin{aligned} p_i(x_i) &= y(x_i), \quad p_i(x_{i+1}) = y(x_{i+1}), \\ p_i'(x_i) &= s_i, \quad p_i'(x_{i+1}) = s_{i+1}, \quad i = \overline{0, n}, \end{aligned} \quad (4.13)$$

где  $s_i, i = \overline{0, n}$ , - свободные параметры. Полученная кусочно-кубическая функция  $Sp_3y$  является непрерывной на  $[a; b]$  и имеет непрерывную первую производную на отрезке  $[a; b]$  независимо от того, как выбирают свободные параметры  $s_i, i = \overline{0, n}$ , - угловые коэффициенты касательных в узлах сетки.

Для вычисления коэффициентов многочлена  $p_i(x)$  используем его представление в виде полинома Ньютона для случая кратных узлов (1.17)

$$\begin{aligned} p_i(x) &= y_i + (x - x_i)[x_i, x_i]y + (x - x_i)^2[x_i, x_i, x_{i+1}]y + \\ &+ (x - x_i)^2(x - x_{i+1})[x_i, x_i, x_{i+1}, x_{i+1}]y. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Коэффициенты в (4.14), т.е. разделенные разности, определяем из табл. 4.1.

Таблица 4.1. Разделенные разности сплайна

Аргумент	Функция	Разделенные разности		
		первая	вторая	третья
$x_i$	$y(x_i)$	$s_i$	$[x_i, x_{i+1}] - s_i$	$\frac{s_i + s_{i+1} - 2[x_i, x_{i+1}]}{(\Delta x_i)^2}$
$x_i$	$y(x_i)$	$[x_i, x_{i+1}]$	$\Delta x_i$	
$x_{i+1}$	$y(x_{i+1})$	$s_{i+1}$	$\frac{s_{i+1} - [x_i, x_{i+1}]}{\Delta x_i}$	
$x_{i+1}$	$y(x_{i+1})$			

Сравнивая эту таблицу с табл. 1.1, видим, что для кратных узлов интерполирования (в первом столбце есть повторяющиеся величины) необходимо за-



даться вместо разделенных разностей дополнительной информацией о поведении функции (параметры  $s_i$ ).

Традиционно многочлен (4.14) записывают в виде степеней разности  $(x - x_i)$ . В этом случае справедливо

$$p_i(x) = c_{1,i} + c_{2,i}(x - x_i) + c_{3,i}(x - x_i)^2 + c_{4,i}(x - x_i)^3, \quad (4.15)$$

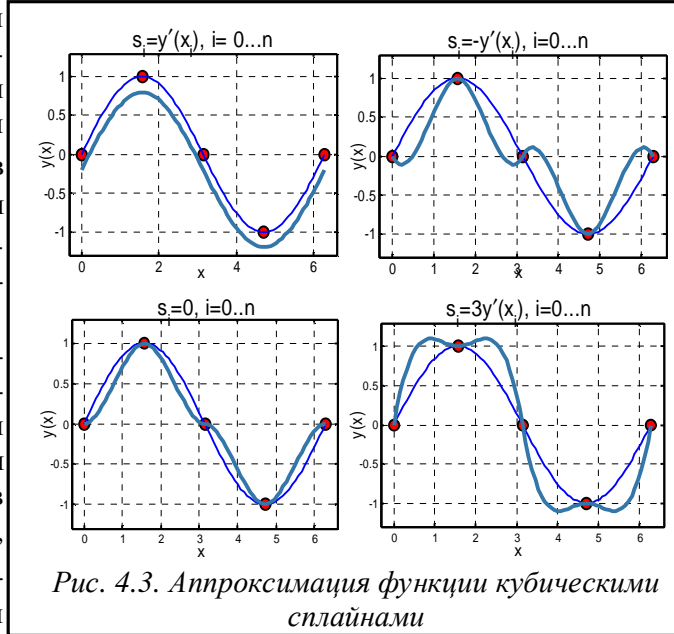
$$c_{1,i} = p_i(x_i) = y(x_i) = y_i, \quad c_{2,i} = p_i'(x_i) = s_i,$$

$$c_{3,i} = \frac{1}{2} p_i''(x_i) = \frac{[x_i, x_{i+1}]y - s_i}{\Delta x_i} - c_{4,i} \Delta x_i, \quad c_{4,i} = \frac{1}{6} p_i'''(x_i) = \frac{s_i + s_{i+1} - 2[x_i, x_{i+1}]y}{(\Delta x_i)^2}.$$

Различные методы интерполяции кусочно-кубическими многочленами  $Sp_3$  у отличаются выбором угловых коэффициентов  $s_i, i=\overline{0,n}$  в (4.13), при этом, естественно, получаются разные многочлены (4.15).

На рис. 4.3 приведены варианты кусочно-многочленной аппроксимации кубическими сплайнами для различных способов выбора коэффициентов  $s_i, i=\overline{0,n}$ . На каждом из графиков изображены узлы интерполяции (они отмечены кружками), исходная функция  $\sin x$  (ее график изображен тонкой линией см. рис.) и кубический сплайн, график которого изображается толстой линией.

В верхний левый график (рис. 4.3,а) соответствует случаю, когда в качестве значений этих коэффициентов были использованы значения производной функции в узлах сетки  $s_i = y'(x_i), i=\overline{0,n}$ . При изображении графики функции и сплайна налагались друг на друга, так что для наглядности график сплайна несколько сдвинут вниз. Второй график (рис. 4.3,б): верхний справа соответствует противоположному выбору угловых коэффициентов:  $s_i = -y'(x_i), i=\overline{0,n}$ . Для третьего графика (рис. 4.3,в) слева внизу использовались формулы  $s_i = 0, i=\overline{0,n}$ . Что соответствует выбору горизонтальной касательной кубического сплайна в узлах интерполяции. И, наконец, для последнего графика (рис. 4.3,г) были выбраны следующие значения угловых коэффициентов касательных в узлах сетки:  $s_i = 3y'(x_i), i=\overline{0,n}$ .



Как видно, не все из предложенных способов выбора угловых коэффициентов удачны. Но тем не менее в численных расчетах используются разные варианты. Проанализируем самые известные и используемые способы выбора угловых коэффициентов.

#### 4.3.1. Интерполяция кубическими многочленами Эрмита

В этом случае принимают в качестве значения параметра  $s_i$  значение первой производной исходной функции  $y(x)$  в  $i$ -м узле сетки:  $s_i = y'(x_i) = \overline{y}'_i$ ,  $i = \overline{0, n}$ , тем самым придавая аппроксимации локальный характер. Этот термин предполагает, что изменения в  $i$ -м узле сетки приводит к перерасчету только многочленов  $p_{i-1}(x)$  и  $p_i(x)$ . Остальные многочлены и их значения вне этих отрезков не изменяются. Выбор  $i$ -го многочлена зависит только от поведения функции  $y(x)$  на отрезках  $[x_{i-1}; x_i]$  и  $[x_i; x_{i+1}]$ . При таком определении угловых параметров коэффициенты многочлена (4.15) равны:

$$c_{1,i} = y_i, \quad c_{2,i} = y'_i, \quad c_{3,i} = \frac{[x_i, x_{i+1}]y - y'_i - c_{4,i}\Delta x_i}{\Delta x_i}, \quad c_{4,i} = \frac{y'_i + y'_{i+1} - 2[x_i, x_{i+1}]y}{(\Delta x_i)^2}.$$

Следствием такой локальной аппроксимации является непосредственный расчет сплайна  $Sp_3 y$ , без каких-либо предварительных вычислительных действий. Однако непосредственное использование производных не всегда возможно, особенно если функция задана таблично. Точность аппроксимации сплайном Эрмита определяется следующей теоремой.

**Теорема 4.2.** Если функция  $y(x) \in C^4[x_i; x_{i+1}]$ , то для многочлена  $p_i(x)$  на отрезке  $[x_i; x_{i+1}]$  справедлива оценка остаточного члена

$$|y(x) - p_i(x)| = \frac{1}{120} y^{(4)}(x_i + Q\Delta x_i)(x - x_i)^4, \quad 0 < Q < 1.$$

*Доказательство.* Выражаем коэффициенты в формуле (4.15) через значение функции и значения ее производных в точке  $x_i$ . Разлагая значение функции и ее первой производной в точке  $x_{i+1}$  по формуле Тейлора:

$$y_{i+1} = y(x_{i+1}) = y(x_i + \Delta x_i) = y(x_i) + y'(x_i)\Delta x_i + \frac{1}{2}y''(x_i)\Delta x_i^2 + \frac{1}{6}y'''(x_i)\Delta x_i^3 + \frac{1}{24}y^{(4)}(x_i + Q\Delta x_i)\Delta x_i^4,$$

$$y'_{i+1} = y'(x_{i+1}) = y'(x_i + \Delta x_i) = y'(x_i) + y''(x_i)\Delta x_i + \frac{1}{2}y'''(x_i)\Delta x_i^2 + \frac{1}{6}y^{(4)}(x_i + Q\Delta x_i)\Delta x_i^3,$$

получаем, что выполняются оценки для коэффициентов сплайна  $c_{3,i} = \frac{1}{2}y''(x_i) + \bar{0}(\Delta x_i)$ ,  $c_{4,i} = \frac{1}{6}y'''(x_i) + \bar{0}(\Delta x_i)$ . Это означает, что многочлен (4.15) с точностью до величины порядка  $\bar{0}(\Delta x^3)$  совпадает с многочленом Тейлора третьего порядка для функции  $y(x)$ . Тогда погрешность аппроксимации

функции  $y(x)$  многочленом  $p_i(x)$  на отрезке  $[x_i, x_{i+1}]$  определяется равенством

$$|y(x) - p_i(x)| = \frac{1}{120} y^{(4)}(x_i + \Theta \Delta x) (x - x_i)^4. \text{ Теорема доказана. } \blacktriangle$$

*Следствие 4.1.* Если функция  $y(x)$  четырежды дифференцируема на  $[a; b]$ , то справедлива оценка точности аппроксимации кубическим многочленом Эрмита:  $\|y(x) - Sp_3 y\| < \frac{M}{120} \max_i (\Delta x_i)^4$ ,  $M = \left| \sup_{x \in [a; b]} y^{(4)}(x) \right|$ .

#### 4.3.2. Интерполяция кубическими многочленами Бесселя

Для кубических многочленов Бесселя  $Sp_3 y$  нет необходимости в задании производных в узлах сетки, поэтому они могут быть использованы в первую очередь для аппроксимации табличных функций. В этом случае в качестве  $s_i$ ,  $i = \overline{1, n-1}$ , выбирают угловой коэффициент (первую производную) в точке  $x_i$ ,  $i = \overline{1, n-1}$ , многочлена  $p_i(x)$ , выраженный через первую центральную разность в этом узле:  $s_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x_i + \Delta x_{i-1}} = \frac{[x_{i-1}, x_i] \Delta x_i + [x_i, x_{i+1}] \Delta x_{i-1}}{\Delta x_{i-1} + \Delta x_i}$ . Отсюда следует,

что интерполяция многочленами Бесселя также локальна. Но она обеспечивает только аппроксимацию порядка  $\bar{O}(\Delta x^2)$ , ибо величина  $s_i$ ,  $i = \overline{1, n-1}$ , получаемая из этого соотношения, обеспечивает порядок аппроксимации первой производной  $\bar{O}(\Delta x^2)$  на произвольной сетке, на равномерной же сетке - порядок аппроксимации многочленов Бесселя  $\bar{O}(\Delta x^3)$ . Открытым остается вопрос о выборе угловых коэффициентов сплайна  $Sp_3 y$  в граничных узлах сетки  $s_0$  и  $s_n$ .

#### 4.3.3. Интерполяция кубическими сплайнами

В этом случае свободные параметры  $s_i$ ,  $i = \overline{1, n-1}$ , определяется из условия, что функция  $Sp_3 y$  должна быть дважды непрерывно дифференцируемой на отрезке  $[a; b]$ , т.е. выбираются так, чтобы  $Sp_3 y$  была функцией с непрерывной кривизной. Отсюда следует, что во внутренних узлах сетки  $p_{i-1}''(x_i) = p_i''(x_i)$ ,  $i = \overline{1, n-1}$ , что соответствует выполнению равенств  $3c_{3, i-1} + 6c_{4, i-1} \Delta x_{i-1} = 2c_{3, i}$ ,  $i = \overline{1, n-1}$ , а это эквивалентно  $\frac{2([x_{i-1}, x_i] - s_{i-1})}{\Delta x_{i-1}} + 4c_{4, i-1} \Delta x_{i-1} = \frac{2([x_i, x_{i+1}] - s_i)}{\Delta x_i} - 2c_{4, i-1} \Delta x_i$ ,  $i = \overline{1, n-1}$  или

$$s_{i-1} \Delta x_i + s_i (2(\Delta x_{i-1} + \Delta x_i) + s_{i+1} \Delta x_{i-1}) = b_i, i = \overline{1, n-1}, \quad (4.16)$$

где  $b_i = 3(\Delta x_i [x_{i-1}, x_i] + \Delta x_{i-1} [x_i, x_{i+1}])$ . Допуская, что два оставшихся свободных параметра  $s_0$  и  $s_n$  каким-то образом уже выбраны (см. далее), получаем из (4.16) трехдиагональную систему для  $n-1$  неизвестных  $s_i$ ,  $i = \overline{1, n-1}$  с матрицей, имеющей диагональное преобладание:  $|a_{i, i}| > a_{i, i-1} + a_{i, i+1}$ . Следовательно,

система уравнений (4.16) имеет единственное решение, и это решение легко может быть найдено методом прогонки (методом Гаусса).

При таком выборе угловых коэффициентов аппроксимация уже теряет свойства локальности: изменение величин хотя бы в одном узле приводит к полному перерасчету всех коэффициентов сплайна.

Кусочно-многочленная функция  $Sp_3y$ , определяемая из уравнений (4.15) и (4.16), называется кубическим сплайном (*Spline* - в переводе с английского языка означает “гладкая кривая”).

#### 4.3.4. Граничные условия

Различные варианты выбора  $s_0$  и  $s_n$ , которые здесь рассмотрены, также важны для интерполяции кубическими многочленами Бесселя и другими подобными методами, как и для интерполяции кубическими сплайнами.

- Если известны значения производной функции  $y'$  в граничных точках сетки  $x_0$  и  $x_n$ , то вполне естественно выбрать  $s_0 = y'(x_0)$  и  $s_n = y'(x_n)$ . Полученная в результате этого функция  $Sp_3y$  называется фундаментальным интерполяционным кубическим сплайном функции  $y(x)$ .
- Если в граничных точках отрезка известны значения второй производной функции  $y''(x)$ , то можно положить в этих точках  $y''(x_0) = (Sp_3y)''|_{x=x_0}$  и  $y''(x_n) = (Sp_3y)''|_{x=x_n}$ , добавляя в (4.16) уравнения

$$2s_0 + s_1 = 3[x_0, x_1] - \frac{1}{2} \Delta x_0 y''(x_0) \text{ и } s_{n-1} + 2s_n = 3[x_{n-1}, x_n] + \frac{1}{2} \Delta x_{n-1} y''(x_n)$$

соответственно в начало и конец системы.

- Так называемая интерполяция естественными или натуральными сплайнами получается из нулевых граничных условий свободного конца:  $(Sp_3y)''|_{x=x_0} = (Sp_3y)''|_{x=x_n} = 0$ . Вопреки благозвучному наименованию, с теоретической точки зрения, ее использовать нежелательно. Произвольное наложение таких условий приводит к погрешности порядка  $\bar{O}(\Delta x)$  вблизи концов отрезка  $[a; b]$  [пренебрежение второй производной функции  $y(x)$ ] и тем самым резко уменьшает общую скорость сходимости, обеспечиваемую этим методом.
- Если ничего неизвестно о производных на концах отрезка  $[a; b]$ , то следует попытаться применить условие, называемое “отсутствием узла”. При этом выбирают  $s_0$  и  $s_n$  так, что  $p_1(x) = p_2(x)$  и  $p_{n-2}(x) = p_{n-1}(x)$ . Для этого, очевидно, требуется, чтобы  $Sp_3y$  была непрерывной в точках  $x_1$  и  $x_{n-1}$ , что равносильно добавлению в (4.15) уравнений:

$$s_0 \Delta x_1 = s_1 (x_2 - x_0) = \frac{(\Delta x_0 + 2(x_2 - x_0)) \Delta x_1 [x_0, x_1] + \Delta x_0^2 [x_1, x_2]}{x_2 - x_0},$$

$$s_{n-1}(x_n - x_{n-2}) + s_n \Delta x_{n-2} = \\ = \frac{\Delta x_{n-1}^2 [x_{n-2}, x_{n-1}] + (2(x_n - x_{n-2}) + \Delta x_{n-1}) \Delta x_{n-2} [x_{n-1}, x_n]}{x_n - x_{n-2}}.$$

С другой стороны, это граничное условие можно трактовать как требование того, что первый и последний многочлены интерполировали функции  $y(x)$  в дополнительных точках, не являющихся точками согласования многочленов. Это означает, что вместо  $n$  имеем  $n-2$  многочлена, где первый многочлен  $p_0(x)$  в уравнениях (4.15) согласуется с функцией на отрезке  $[x_0; x_2]$ , и при этом выполняются равенства  $p_0(x_i) = y(x_i), i = 0, 1, 2$ , и  $p'_0(x_2) = s_3$ . Аналогично последний многочлен  $p_{n-3}(x)$  согласуется с функцией на отрезке  $[x_{n-2}; x_n]$  причем  $p_{n-3}(x_i) = y(x_i), i = n-2, n-1, n$ , и  $p'_{n-3}(x_{n-2}) = s_{n-2}$ . Прибегнув к такой интерпретации граничных условий, получим первую иллюстрацию того факта, что в случае кусочно-многочленной интерполяции узлы интерполяции и точки согласования многочленов не обязательно совпадают.

- Отметим в заключение, что различные граничные условия можно свободно выбирать и комбинировать.

#### 4.3.5. Свойства наилучшей аппроксимации фундаментальными кубическими сплайнами

В этом разделе рассмотрим свойства функции  $S(x) = Sp_3[y(x)]$  - фундаментального кубического сплайна, интерполирующего данную функцию  $y(x)$  на отрезке  $[a; b]$ . Свойство наилучшей аппроксимации фундаментальным интерполяционным сплайном получим из следующей теоремы.

**Теорема 4.3.** Если функция  $y(x) \in C^2[a; b]$ , то вторая производная погрешности интерполяции  $e(x) = y(x) - S(x)$  ортогональна функции  $Sp_1[y]$ , аппроксимирующей  $y(x)$  по МНК и принадлежащей линейному пространству непрерывных ломаных линий на отрезке  $[a; b]$ , т.е.

$$\int_a^b e''(x) \Phi(x) dx = 0, \forall \Phi(x) \in Sp_1[y].$$

*Доказательство.* Представим интеграл в виде суммы по отрезкам

$$[x_i; x_{i+1}] \int_a^b e''(x) \Phi(x) dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} e''(x) \Phi(x) dx. \text{ Применяя дважды интегрирование по}$$

частям к каждому слагаемому и учитывая, что на каждом отрезке  $[x_i; x_{i+1}]$  функция  $\Phi(x)$  - прямая линия и в узлах интерполяции  $e'(x_i) = 0, e(x_i) = 0$ , получаем искомое утверждение. Теорема доказана. ▲

**Теорема 4.4.** Для произвольной  $y(x) \in C^2[a; b]$  выполняется равенство 
$$\int_a^b [y''(x)]^2 dx = \int_a^b [S''(x)]^2 dx + \int_a^b \left[ y(x) - S(x) \right]''^2 dx,$$
 где  $S(x)$  - фундаментальный сплайн функции  $y(x)$  на отрезке  $[a; b]$ .

*Доказательство.* Вычислим интеграл

$$\int_a^b y''(x)^2 dx = \int_a^b [S''(x) + e''(x)]^2 dx = \int_a^b [S''(x)]^2 dx + 2 \int_a^b S''(x)e''(x) dx + \int_a^b [e''(x)]^2 dx.$$

Из предыдущей теоремы следует, что второе слагаемое равно нулю, поскольку  $S''(x) \in Sp_1[y]$ . Это и доказывает искомое. Теорема доказана.  $\blacktriangle$

Пользуясь доказанными теоремами, нетрудно сформулировать и доказать свойства фундаментального кубического сплайна.

**Теорема 4.5 (экстремальное свойство фундаментального кубического сплайна).** Из всех функций  $g(x)$ , которые согласуются с функцией  $y(x)$  в точках  $x_i, i = \overline{0, n}$ , и обладают двумя непрерывными производными, только

$S(x) = Sp_3 y$  единственным образом минимизирует интеграл 
$$\int_a^b g''(x)^2 dx.$$

*Доказательство.* Для любой такой функции  $g(x)$  должно выполняться равенство  $Sp_3 g(x) = Sp_3 y(x)$ , поэтому из теоремы 4.3 следует, что неравенство 
$$\int_a^b [g''(x)]^2 dx = \int_a^b [S''(x)]^2 dx + \int_a^b [g''(x) - S''(x)]^2 dx \geq \int_a^b [S''(x)]^2 dx$$
 переходит в равенство тогда и только тогда, когда  $g''(x) = S''(x)$ , что в соответствии с условиями интерполяции эквивалентно  $g(x) = S(x)$ . Теорема доказана.  $\blacktriangle$

Это и есть свойство наилучшей гладкости интерполяционных кубических сплайнов. Функция  $S(x) = Sp_3 y$  минимизирует (приближенно) “энергию” механической деформации 
$$\int_a^b \frac{[g''(x)]^2}{[1 + [g''(x)]^2]^{5/2}} dx$$
 кривых, проходящих через заданные точки. По существу  $S(x)$  имитирует положение тонкого гибкого стержня или лекала, проходящего через заданные точки. В этом и состояла, наверное, причина выбора Шенбергом в 1946 году терминов “сплайн-кривые” и “сплайн-функция”.

**Теорема 4.6 (экстремальное свойство второй производной фундаментального кубического сплайна).** Вторая производная фундаментального кубического сплайна, интерполирующего функцию  $y(x)$ , является ломаной линией из пространства  $Sp_1[y]$ , аппроксимирующей вторую производную функции  $y(x)$  по методу МНК, т.е.  $S''(x) = Sp_1 y(x)$ .

*Доказательство.* Из теоремы 4.3 следует, что функция  $e''(x) = y''(x) - S''(x)$  ортогональна пространству  $Sp_1[y]$ , а поэтому и функции

$S''(x)$ . Другими словами, найдутся такие коэффициенты  $a_i, i = \overline{0, n}$ , что будет выполняться  $S''(x) = \sum_{j=0}^n a_j u_j(x)$  и  $\int_a^b \left( y''(x) - \sum_{j=0}^n a_j u_j(x) \right) u_i(x) dx = 0, i = \overline{0, n}$ , где  $u_i(x), i = \overline{0, n}$  - некоторый базис в пространстве  $Sp_1[y]$ . Эти условия ортогональности могут быть записаны в виде уравнений  $\sum_{j=0}^n a_j \int_a^b u_j(x) u_i(x) dx = \int_a^b y''(x) u_i(x) dx, i = \overline{0, n}$ , которые представляют собой нормальные уравнения для определения функции из пространства  $Sp_1[y]$ , аппроксимирующей  $y''(x)$  по МНК. Теорема доказана. ▲

Это и есть свойство наилучшей аппроксимации фундаментальными интерполяционными кубическими сплайнами. Из формулы (4.3) получаем  $\|S''(x)\| \leq 3\|y''\|$ . Тогда для функции  $y(x)$  с четырьмя непрерывными производными на  $[a; b]$  имеем:  $\|e''(x)\| = \|y''(x) - S''(x)\| \leq 4 \text{dist}(y''(x), Sp_1[y]) \leq \frac{1}{2} \Delta x^2 \|y^{(4)}\|$ .

Из этого соотношения находим ограничение для максимальной погрешности  $\|e\|$  интерполяции. В произвольной точке отрезка  $[x_i; x_{i+1}]$  выполняется:

$$e(x) = e(x_i) + (x - x_i) [x_i, x_{i+1}] + (x - x_i)(x - x_{i+1}) [x_i, x_{i+1}, x] = \frac{1}{2} (x - x_i)(x - x_{i+1}) e''(x),$$

где точка  $x \in (x_i; x_{i+1})$ . Поэтому  $|e(x)| \leq \frac{(\Delta x_i)^2}{8} \max_{x \in (x_i; x_{i+1})} |e''(x)|$ . Таким образом, справедлива оценка погрешности интерполяции

$$\|e\| \leq \frac{1}{8} |\Delta x|^2 \|e''\| \leq \frac{1}{8} |\Delta x|^2 4 \text{dist}(e'', Sp_1[y]).$$

#### 4.4. Сглаживание кубическими многочленами

Интерполяция как метод построения аппроксимации сплайнами эффективна только тогда, когда значения функции известны точно.

Рассмотрим следующую задачу. Пусть заданы приближенные значения некоторой гладкой функции  $y(x)$  в узлах сетки  $\tilde{y}_k = y(x_k) + e_k, k = \overline{0, n}$ , и модель независимых ошибок вычисления этих значений  $e_k \sim N(0, S_k^2), k = \overline{0, n}$ . Требуется восстановить функцию  $y(x)$ .

Зададимся некоторым значением параметра  $p \in [0; 1]$  и рассмотрим функционал

$$J[S(x)] = pM[S(x)] + (1-p) \int_{a=x_0}^{b=x_n} (S''(t))^2 dt, \quad M[f] = \sum_{k=0}^n \left( \frac{\tilde{y}_k - S(x_k)}{S_k} \right)^2.$$

В качестве решения поставленной задачи выберем функцию

$$S_p(x) = \arg \min_{S(x) \in Sp_3[y]} J[S(x)]. \quad (4.17)$$

Минимизация (4.17) - компромисс между приближением к заданным значениям функции и построением гладкой функции. В зависимости от значения параметра  $p$  будет определяться и конечный результат. В то время как параметр  $p$  изменяется от 0 до 1, решение задачи изменяется от аппроксимации функции в пространстве  $W_2^2$  до естественной интерполяции сплайн-функции. В силу строгой выпуклости функционала  $J[S(x)]$  в пространстве  $Sp_3[y]$  и теоремы 4.6 справедлива

**Теорема 4.7.** *Решением экстремальной задачи (4.17) является натуральный сплайн с граничными условиями:  $S_p''(x_0) = S_p''(x_n) = 0$ .*

На отрезке  $[x_k; x_{k+1}]$  натуральный сплайн  $S_p(x)$  полностью определяется четырьмя величинами: своими значениями в узлах и значениями второй производной во внутренних узлах. Пусть  $a_k = S_p(x_k)$  и  $c_k = S_p''(x_k)/2$ . Тогда, учитывая граничные условия и требование непрерывности первой производной, строим систему линейных алгебраических уравнений для нахождения коэффициентов сплайна:

$$\begin{cases} c_0 = 0, \\ c_{k-1}\Delta x_{k-1} + 2c_k(\Delta x_k + \Delta x_{k-1}) + c_{k+1}\Delta x_k = 3\left(\frac{\Delta a_k}{\Delta x_k} - \frac{\Delta a_{k-1}}{\Delta x_{k-1}}\right) & k = \overline{1, n-1}, \\ c_n = 0. \end{cases} \quad (4.18)$$

Пусть  $\mathbf{K}$  - диагональная ковариационная матрица ошибок,  $\mathbf{G} = \mathbf{K}^{-1}$ ,  $\mathbf{a} = (a_1 \ a_2 \dots a_n)$ ,  $\mathbf{c} = (c_2 \ c_3 \dots c_{n-1})$ ,  $\mathbf{R}$  - симметричная трехдиагональная квадратная матрица порядка  $n-2$  с общей строкой  $(\Delta x_{k-1} \ 2(\Delta x_{k-1} + \Delta x_k) \ \Delta x_k)$ ,  $\mathbf{Q}^T$  - трехдиагональная матрица с порядками  $(n-2) \times n$  и общей строкой  $\left(\frac{1}{\Delta x_{k-1}} \ -\frac{1}{\Delta x_{k-1}} \ -\frac{1}{\Delta x_k} \ \frac{1}{\Delta x_k}\right)$ . Система уравнений принимает вид:  $\mathbf{Rc} = 3\mathbf{Q}^T \mathbf{a}$ .

Справедливо тождество  $\int_0^h (l(x))^2 dx \equiv \frac{h}{3} (l(0))^2 + l(0)l(h) + (l(h))^2$  для произвольной прямой линии  $l(x)$ . В принятых обозначениях функционал  $J[S(x)]$  записывается как:  $J[S(x)] = p \sum_{k=0}^n \left(\frac{\tilde{y}_k - a_k}{s_k}\right)^2 + \frac{4(1-p)}{3} \sum_{k=0}^n \Delta x_k (c_k^2 + c_k c_{k+1} + c_{k+1}^2)$  или в матричной форме:

$$J[S(x)] = p(\tilde{\mathbf{y}} - \mathbf{a})^T \mathbf{G}(\tilde{\mathbf{y}} - \mathbf{a}) + \frac{2}{3}(1-p)\mathbf{c}^T \mathbf{Rc}$$

Подставим в это выражение  $\mathbf{c} = 3\mathbf{R}^{-1}\mathbf{Q}^T \mathbf{a}$ . Дифференцируя  $J[S(x)]$  по компонентам вектора  $\mathbf{a}$  и приравнявая производную к нулю, получаем уравнение для определения вектора  $\mathbf{a}$ :

$$p\mathbf{G}(\tilde{\mathbf{y}} - \mathbf{a}) = 2(1-p)\mathbf{Qc} \text{ и } M[S_p] = (\tilde{\mathbf{y}} - \mathbf{a})^T \mathbf{G}(\tilde{\mathbf{y}} - \mathbf{a}). \quad (4.19)$$



Здесь  $M[S_p]$  - значение невязки на решении задачи (4.17). Для нахождения вектора  $c$  умножим обе части (4.19) на  $3Q^T G$ . Получим  $(6(1-p)Q^T GQ + pR)c = 3pQ^T \tilde{y}$ , откуда имеем искомое

$$c = 3p(6(1-p)Q^T GQ + pR)^{-1} Q^T \tilde{y} \text{ и } a = \tilde{y} - 6(1-p)GQu, \quad c = 3pu. \quad (4.20)$$

Теперь значения сглаживающего сплайна и его производных в узлах сетки находятся по формулам:

$$S_p(x_k) = a_k, \quad S'_p(x_k) = \frac{\Delta a_k}{\Delta x_k} - S''_p(x_k) \frac{\Delta x_k}{2} + S''_p(x_k^+) \frac{(\Delta x_k)^2}{6}, \quad (4.21)$$

$$S''_p(x_k) = 6pu_k, \quad S''_p(x_k^+) = (S''_p(x_{k+1}) - S''_p(x_k)) \frac{1}{\Delta x_k}.$$

Значение сплайна в произвольной точке отрезка  $[x_k; x_{k+1}]$  определяется формулой

$$S_p(x) = S_p(x_k) + S'_p(x_k)(x - x_k) + \frac{1}{2} S''_p(x_k)(x - x_k)^2 + \frac{1}{6} S''_p(x_k^+)(x - x_k)^3.$$

*Пример 4.2.* Для функции, заданной таблично (табл. 4.2) своими значениями и СКО ошибок, построить сглаживающий сплайн.

Таблица 4.2. Значения интерполируемой функции и ее СКО

$k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$x_k$	0	0.785	1.571	2.356	3.142	3.927	4.712	5.498	6.283
$\tilde{y}_k$	-0.208	0.387	1.043	0.792	-0.523	-0.225	-0.664	-0.711	0.1403
$S_k$	0.48	0.19	0.34	0.29	0.46	0.40	0.28	0.11	0.43

*Решение.* Зададимся величиной параметра  $p = 0.9^1$ . Составим ковариационную матрицу  $K = \text{diag}(0.230 \ 0.037 \ 0.117 \ \dots)$ , пользуясь последней строкой табл. 4.2. Матрица  $K$  квадратная, ее порядок равен 9. Для экономии места приведена только часть этой матрицы. Затем найдем весовую матрицу  $G = K^{-1} = \text{diag}(4.3393 \ 26.999 \ 8.5129 \ \dots)$ . Построим матрицу

$$R = \begin{pmatrix} 3.1416 & 0.7854 & 0 & \dots \\ 0.7854 & 3.1416 & 0.7854 & \dots \\ 0 & 0.7854 & 3.1416 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} - \text{симметричную квадратную матрицу по-}$$

рядка 7. Поскольку сетка равномерная, то все элементы на диагоналях матри-

<sup>1</sup> Определение истинного значения параметра выходит за рамки этого пособия.

цы  $R$  одни и те же. Матрица  $Q = \begin{pmatrix} 1.2732 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -2.546 & 1.2732 & 0 & \dots & 0 \\ 1.2732 & -2.546 & 1.2732 & \dots & 1.2732 \\ 0 & 1.2732 & -2.546 & \dots & -2.546 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 1.2732 \end{pmatrix}$

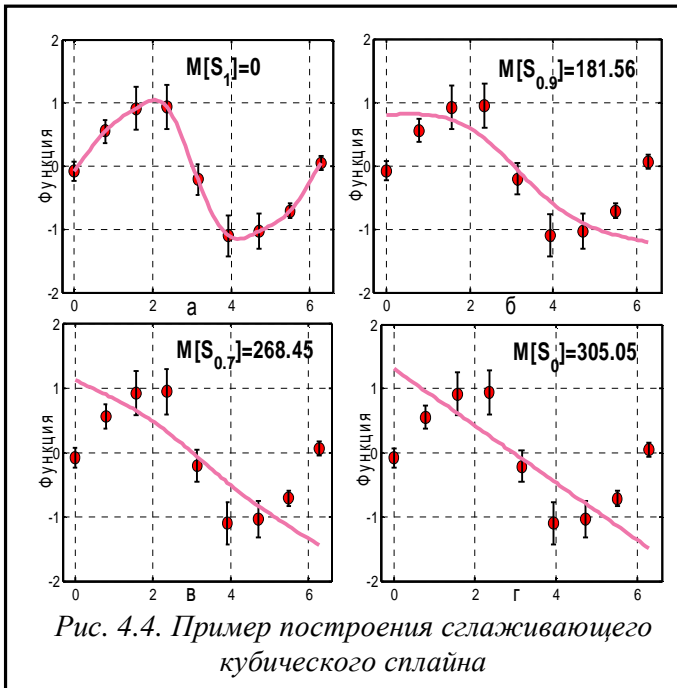


Рис. 4.4. Пример построения сглаживающего кубического сплайна

также с постоянными элементами на диагоналях. Найдем по формулам (4.19) векторы  $\bar{c}$  и  $\bar{a}$ , а затем и сам сплайн. График сглаживающего сплайна изображен на рис. 4.4,б. Значения функции  $\tilde{y}_k$ ,  $k = \overline{0,8}$ , отмечены кружками, а их СКО - вертикальными черточками на рис. 4.4,а. Размер вертикальной черточки соотнесен с СКО отдельных измерений. Сглаживающий сплайн изображен непрерывной кривой. Над графиком показано значение невязки  $M[S_p]$  для построенного сглаживающе-

го сплайна. На других рисунках приведены графики сглаживающих сплайнов для различных значений параметра  $p$ . Характер сплайна меняется от интерполирующего (на рис. 4.4,а сплайн проходит через значения функции и невязка равна нулю) до прямой линии на рис. 4.4,г, на которой имеем минимум квадрата второй производной и невязка достигает своего наибольшего значения.

#### 4.5. Аппроксимация напряженными кубическими сплайнами

Вычислительная проблема аппроксимации сплайнами сопровождается двумя трудностями. Первая из них - это отсутствие данных. Этот интуитивный и неточный термин предназначен для описания следующей ситуации: аппроксимация выполнена удовлетворительно с формальной точки зрения. Однако возможный пользователь ее результатов может считать, что она выполнена неправильно или предпочесть другую аппроксимацию. В действительности же здесь дело не в неправильности аппроксимации, а в недостатке имеющихся данных для применения нужной пользователю аппроксимационной схемы. Конечно, такие претензии пользователя временами необоснованны, поскольку могут быть с успехом разрешены, если потребовать дополнительные данные для той части кривой, где аппроксимация кажется неудовлетворительной. Однако

по крайней мере в одной ситуации такие претензии оправданы: когда имеются чужеродные точки перегиба графика функции.

Интерполируем функцию, заданную табл. 4.3. Есть все основания предполагать, что значения функции определены достаточно точно. На рис. 4.5 эти значения отмечены круглыми маркерами.

Таблица 4.3. Изменение механических свойств титана при нагреве

k	0	1	2	3	4	5
$x_k$	595	635	695	795	855	875
$g_k$	0.644	0.652	0.644	0.694	0.907	1.336
k	6	7	8	9	10	11
$x_k$	895	915	935	985	1035	1075
$g_k$	4.169	1.598	0.916	0.607	0.603	0.608

Построим интерполирующий кубический сплайн. Результат такого интерполирования представлен на рис. 4.5 тонкой сплошной линией. Анализ показывает, что удовлетворительное интерполирование выполнено на тех участках, на которых характеристики функции не претерпевают значительных изменений. У подножия пика, где происходит переход от горизонтального участка графика к пикообразному, видны внесенные интерполированием искажения в виде ложных колебаний. Точность интерполирования можно повысить, если использовать более мелкие сетки. Избежать ложных точек перегиба можно, применяя сглаживающий сплайн. Однако это не оправдано, поскольку исходные измерения довольно точны. Обсудим эту ситуацию подробнее на примере.

Пусть имеются данные для интерполяции  $(x_k; g(x_k))$ ,  $k = \overline{0, n}$ , и пусть  $f(x)$  - гладкая функция, интерполирующая эти данные. Согласно свойству разделенной разности для каждого  $k$  имеется точка  $x_k \in (x_{k-1}; x_{k+1})$ , для которой справедливо  $[x_{k-1}, x_k, x_{k+1}]g = \frac{f''(x_k)}{2}$ . Поэтому каждому изменению знака в последовательности

$$d_k = [x_k, x_{k+1}]g - [x_{k-1}, x_k]g, \quad k = \overline{1, n-1}, \quad (4.22)$$

элементы которой, с точностью до некоторого множителя, представляют собой разностные производные второго порядка, должно соответствовать изменение знака второй производной функции  $f(x)$ , т.е. на графике этой функции должна присутствовать точка перегиба. Все другие точки перегиба назовем ложными. Это означает, что на промежутке  $(x_k; x_{k+1})$  точка перегиба интерполяционной функции  $f(x)$  ложная, если  $d_k d_{k+1} > 0$ .

Фактически требуется, чтобы график интерполяционной функции сохранял выпуклость (вогнутость) данных в следующем смысле: если функция, интерполирующая данные ломаной линией, выпукла (вогнута) на отрезке  $[x_{r-1}; x_{s+1}]$ , то хорошая интерполяционная функция должна быть выпуклой (вогнутой) на отрезке  $[x_r; x_s]$ . Это условие допускает наличие только одной интерполяционной функции на отрезке  $[x_{k-1}; x_{k+1}]$  при  $d_k = 0$ , а именно, прямой.

Для решения этой проблемы был предложен напряженный сплайн. Вы-  
ражаясь математическим языком, напряженная интерполяционная функция



Рис. 4.5. Интерполяция напряженным сплайном

имеет две непрерывные производные и в промежутке между узлами интерполяции удовлетворяет дифференциальному уравнению  $s^{(4)}(x) - p^2 s''(x) = 0$ , где  $p$  - параметр напряжения. Для  $p = 0$  интерполяционная функция является кусочно-кубической. Однако для  $p > 0$  каждая часть интерполяционной функции есть линейная комбинация частных решений  $1, x, e^{px}, e^{-px}$ . Недостаток такого подхода заключается в использовании показательных функций, вследствие чего вычисление интер-

терполяционной функции становится трудоемким. Применение кубического сплайна с дополнительными узлами, размещенными таким образом, чтобы интерполяционная функция могла иметь крутые изгибы там, где требуется, решает эту проблему.

Будем интерполировать данные  $g(0) = 0, g'(0) = s_0, g(1) = 0, g'(1) = s_1$  с помощью кубического многочлена  $f(x) = s_0 x - (2s_0 + s_1)x^2 + (s_0 + s_1)x^3$ . Поскольку  $[0,0,1]g = -s_0$  и  $[0,1,1]g = s_1$ , то точка перегиба на  $(0;1)$  будет ложной, если  $s_0 s_1 < 0$ . С другой стороны, для интерполяционной функции  $f''(0) = -2(2s_0 + s_1)$  и  $f''(1) = (s_0 + 2s_1)$ . Поэтому интерполяционная функция не содержит ложной точки перегиба на  $(0;1)$  тогда и только тогда, когда  $(2s_0 + s_1)(s_0 + 2s_1) \leq 0$ . Это условие можно записать в виде  $(2(s_0 - s_1) + 3s_1)(s_0 - s_1 + 3s_1) \leq 0$  или, разделив на  $(s_0 - s_1)^2$  и используя обозначение  $z = \frac{s_1}{s_1 - s_0}$  представить как  $(2 - 3z)(1 - 3z) \leq 0$ . Отсюда следует, что интерполяционная кубическая функция воспроизводит выпуклость (вогнутость) данных, если только  $\frac{1}{3} \leq z \leq \frac{2}{3}$ . Для значений  $z$  вне этого диапазона изменим интерполяционную функцию следующим образом.

Пусть  $z > \frac{2}{3}$ . В этом случае требуется, чтобы изгиб интерполяционной функции вблизи  $x=1$  был резче изгиба монотонной кубической функции. Поэтому заменим функцию, входящую в состав базиса  $1, 1-x, x^3, (1-x)^3$  и изгибающуюся в окрестности точки  $x=1$  более резко, чем остальные, а именно  $x^3$ , кубическим сплайном  $f(x) = f(x; z)$ . Этот сплайн изгибается вблизи точки  $x=1$  резче, чем функция  $x^3$ . Для сохранения непрерывности перехода от функции  $x^3$  к сплайну положим  $f(0) = f'(0) = f''(0) = 0$ ,  $f(1-0) = 1$  и  $f''(x) \geq 0, \forall x \in [0;1]$ . Сплайн имеет вид<sup>1</sup>

$$f(x) = f(x; z) = ax^3 + (1-a) \left( \frac{x-x}{1-x} \right)_+^3,$$

где  $x = x(z)$  - дополнительный узел на отрезке  $[0;1]$ ,  $a = a(z)$  - число из отрезка  $[0;1]$ . Выбираем  $x$  и  $a$  непрерывными функциями переменной  $z$ , причем  $a\left(\frac{2}{3}\right) = 1$ , чтобы обеспечить непрерывный переход к кубическому многочлену

при  $z \leq \frac{2}{3}$  и получить  $x(1-0) = 1$ . Конечно, дополнительный узел не требует никакого пополнения таблицы новыми значениями функции. Это простой вычислительный прием. Теперь интерполяционная функция принимает вид:

$$f(x) = Ax + B(1-x) + Cf(x; z) + D(1-x)^3,$$

где  $A = -C = -\frac{s_0 + 2s_1}{3(2p-1)}$ ,  $B = -D = \frac{(3p-1)s_0 + s_1}{3(2p-1)}$  и  $p = \frac{f'(1; z)}{3} = a + \frac{1-a}{1-x}$ .

Убедимся, что точка изгиба у интерполяционной функции на промежутке  $(0;1)$  существует тогда и только тогда, когда коэффициенты  $f(x)$  и  $(1-x)^3$  имеют разные знаки:  $f''(x) = 6 \left( C \left( ax + (1-a) \frac{(x-x)_+}{(1-x)^3} \right) + D(1-x) \right)$ . Отсюда следует, что вторая производная не меняет знака на отрезке  $[0;1]$  тогда и только тогда, когда знаки  $C$  и  $D$  одинаковые. Условие, согласно которому функция  $f(x)$  не имеет ложных точек перегиба на промежутке  $(0;1)$  (когда  $s_0 s_1 < 0$ ), принимает вид

$$((3p-1)s_0 + s_1)(s_0 + 2s_1) \leq 0 \text{ или } ((3p-1) - 3pz)(1-3z) \leq 0.$$

Поэтому для выполнения условий сохранения выпуклости (вогнутости) на промежутке требуется, чтобы выполнялось неравенство  $\frac{1}{3} \leq z \leq \frac{3p-1}{3p}$  или

<sup>1</sup> Здесь  $(x)_+ = \max\{x, 0\}$  - усеченная функция.

$3p \geq \frac{1}{1-z}$ . Переходя к переменной  $a$ , получаем  $a \leq \left[1 - \frac{1-x}{3(1-z)}\right] \frac{1}{x}$ . Следовательно, наибольшее значение  $a$  определяется равенством  $a(z) = \left[1 - \frac{1-x}{3(1-z)}\right] \frac{1}{x}$ .

Нетрудно подсчитать, что  $a\left(\frac{2}{3}\right) = 1$  при любых  $x$ . Для выполнения условия  $a \geq 0$  необходимо, чтобы  $3(1-z) \geq 1-x$ . Это неравенство выполняется, если справедливо  $1-x(z) = g(1-z)$  при  $g \leq 3$ .

Случай  $z < \frac{1}{3}$  рассматривается аналогично: базисная функция  $(1-x)^3$  заменяется сплайном  $f(1-x; 1-z)$ , который определяется, как и при  $z > \frac{2}{3}$ .

Эти два различных случая сводятся к одному. Представим интерполирующую функцию в виде

$$f(x) = Ax + B(1-x) + Cf(x; z) + Df(1-x; 1-z), \quad (4.23)$$

где  $f(x; z) = ax^3 + (1-a)\left(\frac{x-x}{1-x}\right)_+^3$ ,  $a(z) = \left(1 - \frac{g}{3}\right) \frac{1}{x}$ ,  $x(z) = 1 - \min\left\{1-z, \frac{1}{3}\right\}$  для некоторого  $g \in [0; 3]$ . Если  $z$  фиксировано, то  $a$  и  $x$  уменьшаются с увеличением  $g$ . Суммарный эффект состоит в увеличении кривизны по мере увеличения  $g$ .

Общий случай интерполирования  $g(0) = g_0, g'(0) = s_0, g(1) = g_1, g'(1) = s_1$  можно свести к рассмотренному случаю, анализируя отклонение функции от прямой линии  $g_0 + (g_1 - g_0)x$ . Такая операция не затрагивает свойств выпуклости (вогнутости), а только изменяет величины  $s_0$  и  $s_1$ , использовавшиеся ранее, на  $s_0 - (g_0 - g_1)$  и  $s_1 - (g_0 - g_1)$  соответственно.

Если в еще более общей постановке рассматривать интерполирование по данным  $g(x_k) = g_k, g'(x_k) = s_k, k = i, i+1$ , то упомянутые величины принимают значения  $s_k - [x_k, x_{k+1}]g$  и  $s_{k+1} - [x_k, x_{k+1}]g$ .

Теперь перейдем к общему случаю построения интерполяционной функции из напряженных сплайнов для данных  $(x_k, g_k = g(x_k)), k = \overline{0, n}$ . На каждом отрезке  $[x_k, x_{k+1}], k = \overline{0, n-1}$ , базис выбираем описанным методом, где  $s_k$  равно угловому коэффициенту касательной  $[x_{k-1}, x_k]g$ , а  $s_{k+1}$  соответствует  $[x_{k+1}, x_{k+2}]g$ . Это означает, что интерполяционная функция на отрезке  $[x_k, x_{k+1}]$  имеет вид:

$$A_k + B_k u + C_k f(u; z) + D_k f(1-u; 1-z), \quad u(x) = \frac{x - x_k}{\Delta x_k},$$

$$z = \begin{cases} \frac{d_{k+1}}{d_k + d_{k+1}}, & d_k d_{k+1} \geq 0, \quad d_k + d_{k+1} \neq 0, \\ \frac{1}{2}, & \text{â ĩðîðèâíî ĩëó÷ââ.} \end{cases}, \quad (4.24)$$

Положим  $z = \frac{1}{2}$  в случаях  $k=0, n-1$  (в первом и предпоследнем узлах).

При конкретном выборе значения  $z$  в виде (4.24) зависимость интерполяционной функции от исходных данных может становиться разрывной. Это означает, что незначительная погрешность в исходных данных, изменяющая знак некоторого произведения  $d_k d_{k+1}$ , может существенно изменить интерполяционную функцию. По этой причине выбор величины следует производить по формуле

$$z = \begin{cases} \frac{|d_{k+1}|}{|d_k| + |d_{k+1}|}, & d_k d_{k+1} \geq 0, \quad |d_k| + |d_{k+1}| > 0, \\ \frac{1}{2}, & \text{â ĩðîðèâíî ĩëó÷ââ,} \end{cases} \quad (4.25)$$

в которой устраняется источник разрывности функции.

Коэффициенты интерполяционной формулы (4.24) выражаются через величины

$$A_k = g_k - D_k, \quad B_k = \Delta x_k [x_k, x_{k+1}]g - (C_k - D_k),$$

$$C_k = \Delta x_k^2 \frac{f''_{k+1}}{f''(1; z_k)}, \quad D_k = \Delta x_k^2 \frac{f''_k}{f''(1; 1-z_k)}, \quad k = \overline{0, n-1}. \quad (4.26)$$

Непосредственными вычислениями находим, что  $f''(1; z) = 6 \left( a + \frac{1-a}{(1-x)^2} \right)$ .

Тогда  $\frac{1}{f''(1; z)} = \frac{(1-x)^2}{6(a(1-x)^2 + (1-a))}$ . Вектор  $f''_k$ ,  $k = \overline{0, n}$ , определим таким образом, чтобы интерполяционная функция имела две непрерывные производные во внутренних узлах сетки. Для каждого внутреннего узла получаем уравнение  $f'(x_k - 0) = f'(x_k + 0)$  или

$$\frac{\Delta x_{k-1}}{f''(1; 1-z_{k-1})} f''_{k-1} + \left( \Delta x_{k-1} \frac{f''(1; z_{k-1}) - 1}{f''(1; z_{k-1})} + \Delta x_k \frac{f''(1; 1-z_k) - 1}{f''(1; 1-z_k)} \right) f''_k +$$

$$+ \frac{\Delta x_k}{f''(1; z_k)} f''_{k+1} = d_k, \quad k = \overline{1, n-1}. \quad (4.27)$$

Заметим, что выполняется равенство  $\frac{f''(1; z) - 1}{f''(1; z)} = \frac{1-x}{6} \frac{(3a-1)(1-x) + 3(1-a)}{a(1-x)^2 + (1-a)}$ .

Если не вводить дополнительных узлов ( $a = 1$  всюду на отрезке  $[0;1]$ ), то с учетом формул для производных сплайна  $f(x; z)$  система уравнений (4.27) сводится к системе уравнений интерполяционного сплайна:

$$\frac{\Delta x_{k-1}}{6} f''_{k-1} + \left( \frac{\Delta x_{k-1}}{3} + \frac{\Delta x_k}{3} \right) f''_k + \frac{\Delta x_k}{6} f''_{k+1} = d_k, \quad k = \overline{1, n-1}.$$

Для  $g = 3-0$  напряженный сплайн вырождается в кусочно-ломаную интерполирующую функцию.

К системе (4.27) следует добавить еще два уравнения в граничных узлах, чтобы вектор вторых производных сплайна был определен полностью. Воспользуемся, например, условием отсутствия узла, описанного в разделе 4.3.4. Согласно этому условию во втором  $x_1$  и предпоследнем  $x_{n-1}$  узлах сетки интерполяционная функция должна иметь непрерывную третью производную:  $f'''(x_2 - 0) = f'''(x_2 + 0)$  и  $f'''(x_{n-1} - 0) = f'''(x_{n-1} + 0)$ . Первое из них записывается как  $\frac{C_1 f'''(1; z_1) - D f'''(0; 1 - z_1)}{h_1^3} = \frac{C_2 f'''(0; z_2) - D f'''(1; 1 - z_2)}{h_2^3}$ . Подставляя выраже-

ния для коэффициентов из (4.26), получаем первое уравнение системы:

$$\frac{f'''(0; 1 - z_1)}{f''(1; 1 - z_1) h_1} f''_1 - \left( \frac{f'''(1; z_1)}{f''(1; z_1) h_1} + \frac{f'''(1; 1 - z_2)}{f''(1; 1 - z_2) h_2} \right) f''_2 + \frac{f'''(0; z_2)}{f''(1; z_2) h_2} f''_3 = 0.$$

Предпоследнее уравнение системы строится аналогично.

Параметр  $g$ , собственно и определяющий свойства напряженного сплайна, выбирается исходя из свойств интерполируемой функции.

*Пример 4.3. Интерполировать табличную функцию напряженным сплайном. Значения функции приведены в табл. 4.3.*

*Решение. Выполним интерполирование напряженным сплайном. Зададимся значением параметра  $g = 2$ . По формулам (4.27) составим систему линейных алгебраических уравнений для определения вектора  $f''_k$ ,  $k = \overline{0, n}$ , дополнив ее уравнениями для граничных условий. Затем по формулам (4.26) вычислим коэффициенты напряженного сплайна. Результаты интерполирования напряженным сплайном изображены на рис. 4.5 толстой линией, которая отражает более естественную зависимость физической характеристики титана от температуры.*

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение .....	3
1. ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ.....	4
2. ПРИБЛИЖЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ .....	20
3. ПРИБЛИЖЕННОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ .....	26
4. КУСОЧНО-МНОГОЧЛЕННАЯ АППРОКСИМАЦИЯ .....	35